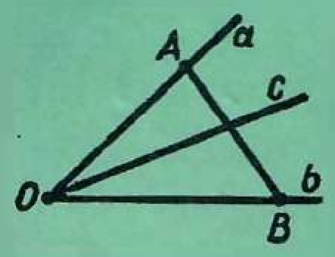
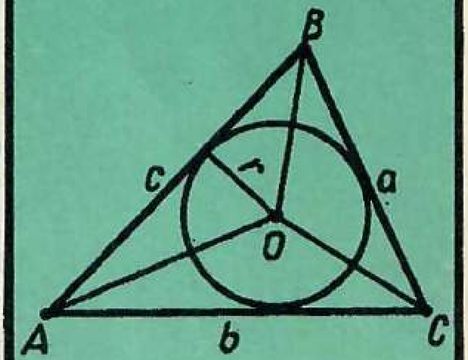
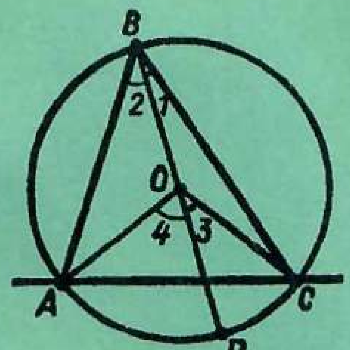
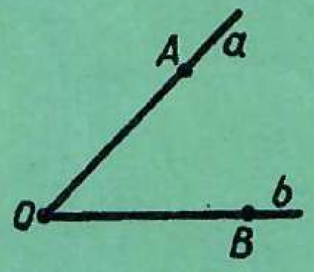
Ю. А. МАКАРОВ К. З. ХӘМИДУЛЛИНА

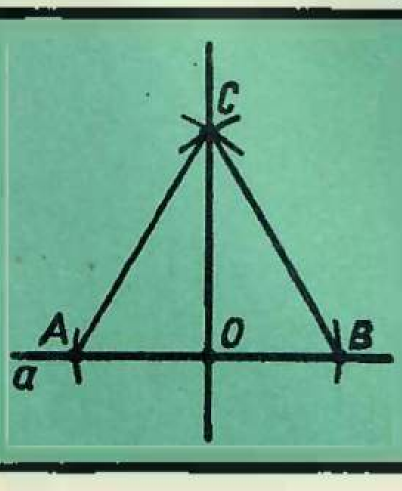
ГЕОМЕТРИЯ











7-9

Ю. А. МАКАРОВ К. З. ХӘМИДУЛЛИНА

ГЕОМЕТРИЯ

Урта мәктәпнең 7—9 нчы сыйныф укучылары өчен уку ярдәмлеге

Татарстан Республикасы Мәгариф министрлыгы тарафыннан тәкъдим ителгән

КАЗАН
«МӘГАРИФ» НӘШРИЯТЫ
1995

ББК 74.262
М15

Макаров Ю. А., Хәмидуллина К. З.

М15 Геометрия: Урта мәктәпнең 7—9 нчы сыйныф укучылары өчен уку ярдәмлеге.— Казан: Мәгариф, 1995.— 175 б. рәс. белән.

ISBN 5-7761-0223-5

М $\frac{4306020000-010}{П86(03)-95}$ БЗ — 61 — 66 — 95/96 **ББК 74.262**

ISBN 5-7761-0223-5
© Макаров Ю. А., Хәмидуллина К. З., 1995

Кадерле укучы!

Синең кулыңда геометрияне үзлегеңнән өйрәнергә булышучы ярдәмлек. Геометрия — бик борынгы һәм кызыклы фән. Шуның белән берррәттән, күп укучылар аны өйрәнүдә зур кыенлыклар кичерәләр. Әгәр дәреслекләрнең теле аңлашылмаса яки кирәгеннән артык катлаулы булып тоелса, һәм син теоремалар исбатлау өчен ясалган рәсемнәрне аңлый алмыйча баш "ватсаң", шушы ярдәмлектән файдалана аласың. Бу китапта материалны син аңларлык телдә гади итеп, сызымнарын акрынлап катлауландыра барып бирергә тырыштык. Гомумән, ярдәмлекне әзерләгәндә безнең төп максатыбыз — геометрия фәнен үзләштерүгә сиңа ярдәм итү булды. Дөрес, һәр параграфтан соң чишү өчен эзлекле рәвештә төзелгән күнегүләр күбрәк булса, яхшырак булыр иде. Без әлегә шушы ярдәмлеккә яраклаштырып төзелгән күнегүләр җыентыгы — дидактик материалларның да басылып чыгуына ышанып калыйк. Ә хәзергә ярдәмлек сиңа хезмәт итә торсын. Һәр параграф ахырында зачет сораулары, контроль эш тексты китерелә. Алар буенча үзеңнең белемеңне тикшереп кара. Тик кисәтеп куябыз: контроль эш текстлары бик гади. Аны һәр укучы башкара алырга тиеш. Ә инде "4" ле яки "5" ле билгеләре алу өчен, ягъни геометрияне тирәнтен өйрәнеп, киләчәктә югары уку йортларында укырга җыенган укучыларга, әлбәттә, катлаулы күнегүләрне күп чишәргә кирәк әле. Бер сүз белән әйткәндә, тырышырга кирәк.

Геометрияне үзләштерүдә сиңа уңышлар теләп калабыз,кадерле укучыбыз!

Авторлар.

7 нче сыйныф

§ 1. ГЕОМЕТРИЯНЕҢ БАШЛАНГЫЧ ТӨШЕНЧӘЛӘРЕ

Беренче класстан башлап без математиканы бер фән буларак өйрәнәбез. Быел без аны икегә — алгебра һәм геометрия фәннәренә аерып өйрәнербез. Алгебра — математиканың зурлыклар өстендә гамәлләрнең үзлекләрен һәм тигезләмәләр чишәргә өйрәнә торган бүлеге. Геометрия — математиканың геометрик фигураларны һәм аларның үзлекләрен өйрәнә торган бүлеге. Кайбер геометрик фигураларны — квадрат, түгәрәк, турыпочмаклык, өчпочмакны сез инде беләсез.

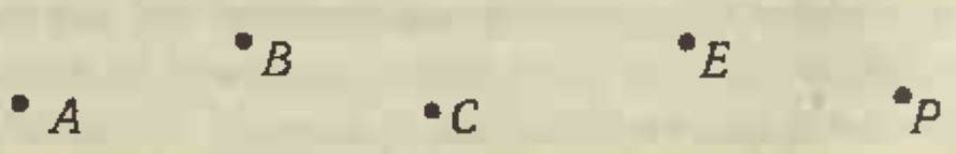
Төп геометрик фигуралар — ул яссылык, туры һәм нокта. Яссылыкка мисал итеп тәрәзә пыяласы өслеген, күлдәге су өслеген, тигез кәгазь бите өслеген китерергә мөмкин. Ләкин болар яссылыкны тулысынча тасвирламыйлар, аның бер өлешен генә тәшкил итәләр. Геометриядә яссылык төрле юнәлештә чиксез рәвештә дәвам итә дип карала.

Турыга мисал булып нык тарттырылган җеп, линейка яки тигез кәгазь битенең кырые хезмәт итә. Алар шулай ук турының бер өлешен генә тәшкил итәләр. Геометриядә турыны ике юнәлештә чиксез дәвам итә дип карыйлар.

Ноктага мисал булып яхшы итеп очланган карандаш белән кәгазь битенә куелган нокта тора.

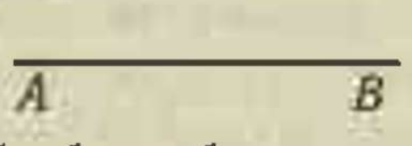
Яссылыкның калынлыгы юк, турының киңлеге дә, калынлыгы да юк, ноктаның буе да, иңе дә, калынлыгы да юк.

Нокталарны латин алфавитының баш хәрефләре белән билгелиләр.



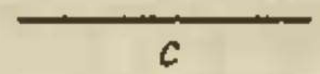
Рәсемдә *A, B, C, E* һәм *P* нокталары сурәтләнгән

Турыны аның ике ноктасы — латин алфавитының ике баш хәрефе ярдәмендә, мәсәлән:



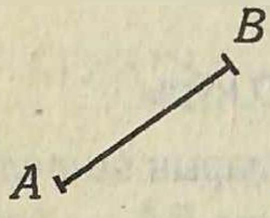
AB турысы

яки бер юл хәрефе белән билгеләргә мөмкин, мәсәлән:

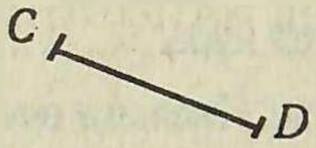


c турысы

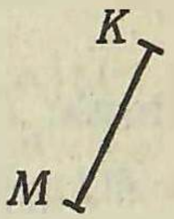
Билгеләмә. *Турының ике яктан чикләнгән өлеше кисемтә дип атала.* Кисемтә үзенең очлары булып хезмәт иткән ике нокта — ике баш хәреф ярдәмендә, мәсәлән:



AB кисемтәсе

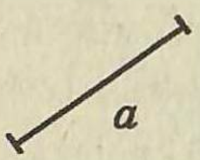


CD кисемтәсе

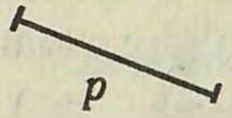


MK кисемтәсе

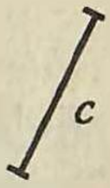
яки бер юл хәрефе белән билгеләнә, мәсәлән:



a кисемтәсе



p кисемтәсе

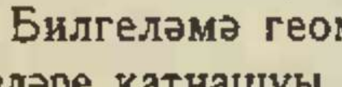


c кисемтәсе

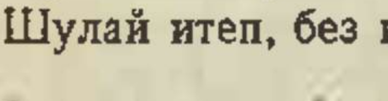
"Билгеләмә" сүзен сез беренче тапкыр очраттыгыз. Киләчәктә бу сүз сезгә бик еш очрар. Геометрияне өйрәнгәндә без яна геометрик фигуралар белән очрашырбыз һәм аларга билгеләмә бирербез, ягъни аларны ничек атау турында килешербез. Билгеләмәләр бер төрдәге фигураларга бер үк исем бирү өчен кирәк. Шулай эшләмәгәндә буталчыклык килеп чыгарга мөмкин: төрле кешеләр бер үк фигураны төрлечә атап, бер-берсен аңламаслар иде.

Билгеләмә геометриянең башка җөмләләреннән "дип атала" сүзләре катнашуы белән аерылып тора.

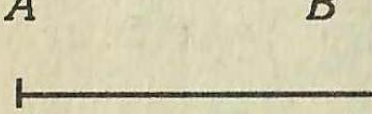
Шулай итеп, без кисемтә белән таныштык.



— бу *AB* кисемтәсе



— бу кисемтә түгел, чөнки ул турының бер яктан гына чикләнгән өлеше

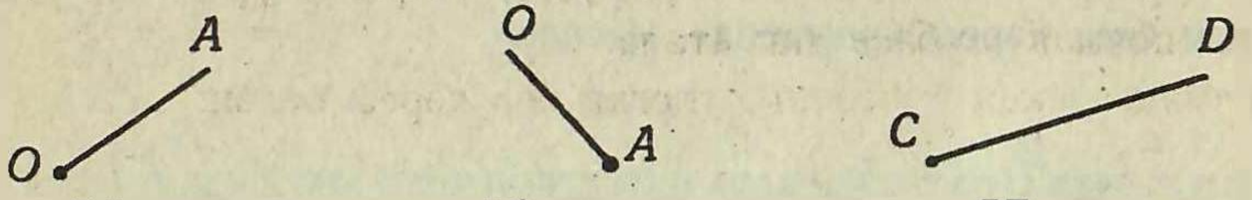


— бу кисемтә түгел, чөнки ул кәкренең бер өлеше

Һәр кисемтәнең озынлыгы була, аны линейка, метр, рулетка ярдәмендә үлчиләр. Озынлык үлчәү берәмлекләре белән сез инде таныш. Ул миллиметр, сантиметр, дециметр, метр, километр. Озынлык һәрвакытта уңай сан белән күрсәтелә. Турының озынлыгы юк, ул чиксез.

Б и л г е л ә м ә. *Турының бер генә яктан чикләнгән өлеше нур дип атала.*

Нур ике хәреф белән билгеләнә, беренче хәреф башлангыч ноктага, икенче хәреф нурдагы теләсә нинди ноктага туры килә.



OA һәм *AO* нурлары төрле. Кисемтә өчен аның очларын билгеләгән хәрефләрне нинди тәртиптә язсаң да барыбер. *AB* һәм *BA* — бер үк кисемтә. Ә *AC* һәм *CA* нурлары бер үк түгел, төрле. *AC* нурының башлангыч ноктасы *A*, *CA* нурыныкы *C*.

1 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Яссылыкка мисал китерегез.
2. Турыга мисал китерегез.
3. Туры ничек билгеләнә?
4. Нәрсә ул кисемтә? Ул ничек билгеләнә?
5. Нәрсә ул нур? Ул ничек билгеләнә?

1 нче контроль эш

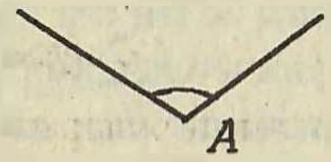
1. Туры, нур, кисемтә сызыгыз, аларны билгеләгез.
2. 4 см озынлыгындагы *AB* кисемтәсе, 5 см озынлыгындагы *AC* кисемтәсе сызыгыз.
3. *OB* һәм *MP* нурлары сызыгыз.
4. Үзара кисешүче *a* һәм *b* турылары сызыгыз.

§ 2. ПОЧМАКЛАР

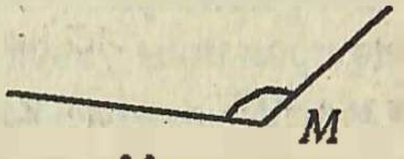
Б и л г е л ә м ә. *Яссылыкның бер ноктадан чыгучы ике нур белән чикләнгән өлеше почмак дип атала.*

Бу нурлар почмакның *яклары* дип, аларның уртак башлангыч ноктасы почмак *түбәсе* дип атала.

Почмак үзенең түбәсендә торган бер хәреф белән:

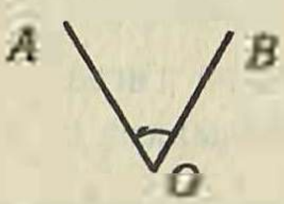


A почмагы

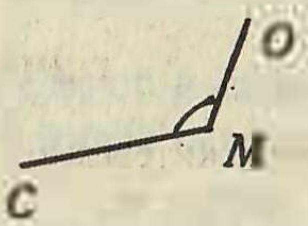


M почмагы

яки өч хәреф белән билгеләнә. Уртадагы хәреф почмакның түбәсен, калган икесе аның якларындагы ике ноктаны билгелиләр.

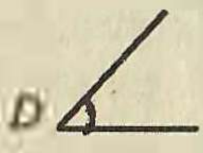


AOB почмагы



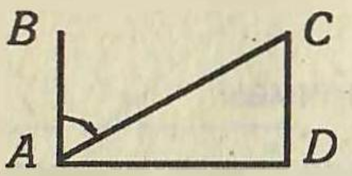
CMO почмагы

Билгеләүне кайсы нурдан башласаң да ярый. *AOB* һәм *BOA* почмаклары бер үк почмак. Билгеләгәндә һәрвакыт азрак хәреф кулланырга омтылырга кирәк. Берничә почмакның түбәсе уртак булса, аларны өч хәреф белән, бер түбәдә бер генә почмак булса, аны бер генә хәреф белән билгеләргә кирәк.

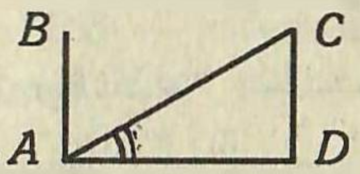


D ноктасы — бер генә почмакның түбәсе. Бу почмакны бер генә хәреф белән билгеләргә мөмкин — *D* почмагы.

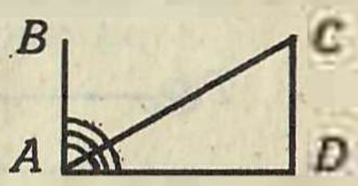
A ноктасы өч почмакның түбәсе. Ул почмакларны өч хәреф белән билгеләргә кирәк:



BAC почмагы



CAD почмагы



BAD почмагы

Һәрвакыт "почмак" дип язып тормас өчен, геометриядә түбәндәге тамга кулланыла: "∠" "∠*AOB*" — "*AOB* почмагы" дип укыла.

Б и л г е л ә м ә. *Бер турыда ятучы, капма-каршы юнәлештәге ике нур ярдәмендә төзелгән почмак җәелгән почмак дип атала.*

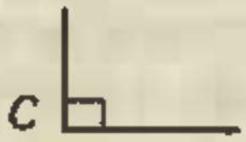
Әгәр җәелгән почмакны 180 тигез өлешкә бүлсәк, почмак үлчәү берәмлеге — *градус* (тамгаланышы: 1°) килеп чыга.

Рәсемдә 1° зурлыгындагы почмак сурәтләнгән.

Билгеләмә. *Җәелгән почмакның йөз сиксәннән бер өлеше градус дип атала.*

Почмакны үлчәү приборы — *транспортир* белән сез инде таныш. Аның ярдәмендә почмакны үлчәп, төзеп, берничә өлешкә бүлеп була.

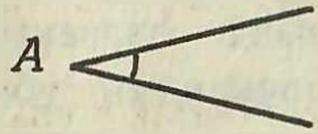
Билгеләмә. 90° *лы почмак туры почмак дип атала.*



Туры *C* почмагы

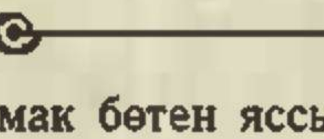
Туры почмак җәелгән почмакның яртысына тигез. Туры почмак китапта, тәрәзәдә, өстәлдә очрый. Сезнең өчпочмакта да туры почмак бар.

Билгеләмә. *Туры почмактан кечерәк булган почмак кысынкы почмак дип атала.*



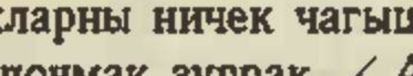
Кысынкы *A* почмагы

Билгеләмә. *Туры почмактан зуррак, җәелгән почмактан кечерәк булган почмак җәенке почмак дип атала.*



Җәенке *B* почмагы

Билгеләмә. *Җәелгән почмактан ике тапкыр зуррак булган почмак тулы почмак дип атала.*

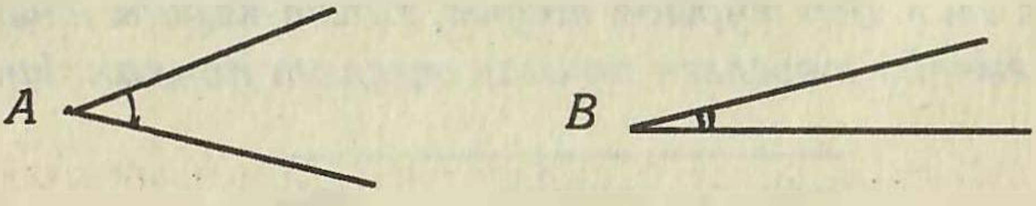


P — тулы почмак

Тулы почмак бөтен яссылыкны эченә ала, аның яклары булган нурлар тәңгәл киләләр. Тулы почмак 360° ка тигез.

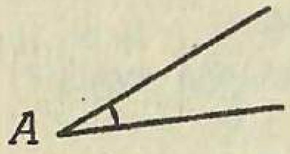
Почмакларны ничек чагыштырырга?

Кайсы почмак зуррак, $\angle A$ мы, $\angle B$ мы?

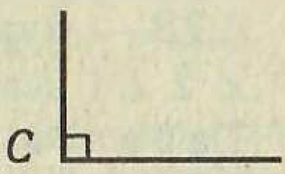


Бу ике почмакның A почмагы зуррак, чөнки күрер күзгә үк аның күбрәк градусларны эченә алуы ташлана. Почмакларның яклары — чиксез озынлыктагы нурлар. Шуңа күрә, рәсемдә озынрак нурлардан төзелгән почмак түгел, ә күбрәк градусларны эченә алганы зуррак булып санала.

Шулай итеп, сез почмаклар белән таныштыгыз.



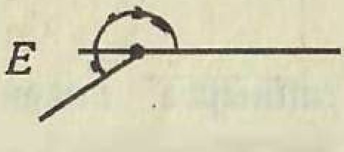
A — кысынкы почмак



C — туры почмак

B — җәенке почмак

D — җәелгән почмак



E — җәелгән почмактан зуррак

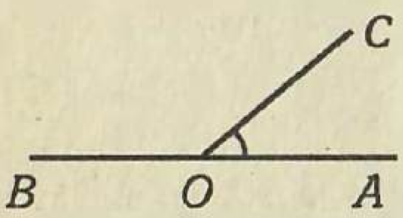
P — тулы почмак

Истә калдырырга:

1. *Туры почмак теләсә нинди кысынкы почмактан зуррак.*
2. *Туры почмак теләсә нинди җәенке почмактан кечерәк.*
3. *Теләсә кайсы җәенке почмак теләсә нинди кысынкы почмактан зуррак.*

Мисал. Ике почмак бергә җәелгән почмак тәшкил итә. Аларның берсе 40°, икенчесен табарга.

Геометриядә мәсьәләләрнең чишелешен түбәндәге тәртиптә язалар, кирәк булганда сызым төзиләр. Нәрсә бирелгәнен, ягъни нәрсә билгеле, шуны язалар. Нәрсәне табарга кирәклеген язалар. "Чишү" сүзен язалар. Мәсьәләләрне математика кагыйдәләреннән файдаланып чишәләр. Азакта җавап язалар.



Бирелгән:
AOB — җәелгән почмак,
$\angle AOC = 40°$.
Табарга:
$\angle BOC$ ын.

Чишү:

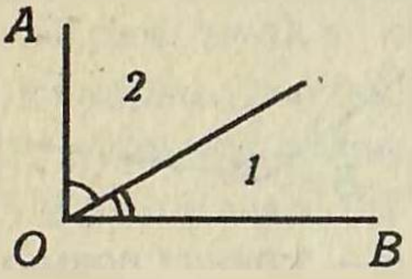
(Мәсьәләдә җәелгән почмак искә алына. Аның 180° ка тигез икәнен онытмыйк.) Икенче почмакны табу өчен 180° тан 40° ны алырга кирәк: $180° - 40° = 140°$.

Җавап: 140°.

Җәяләр эчендәге аңлатма сезнең өчен. Аны язарга кирәкми. Ул сезгә фикер йөртү үрнәге сыйфатында бирелә. Мәсьәләне чишү бер

гамәлдән тора. Киләчәктә дә җәяләр эчендәге аңлатманы үзегезгә ярдәм итеп кулланырсыз.

Мәсьәлә. Туры почмак ике почмактан төзелгән. Аларның берсе икенчесеннән 2 тапкырга зуррак. Бу почмакларны табарга.



Бирелгән:
AOB — туры почмак,
$\angle 2$ $\angle 1$ нан 2 тапкырга зуррак.
Табарга:
$\angle 1$ һәм $\angle 2$.

Чишү:

(Ничәгә, яки "ничә тапкырга" дигән сүзләр кергән мәсьәләләр гадәттә тигезләмә төзеп чишеләләр.)

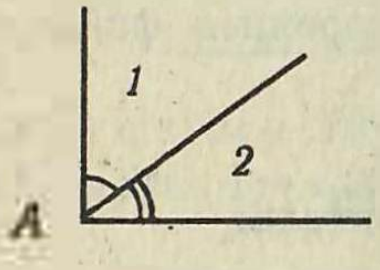
$\angle 1$ ын x дип билгеләсәк, $\angle 2$ $2x$ булыр.

(Тигезләмәне ничек төзергә? Туры почмакның $90°$ лы икәнен искә төшерик). Тигезләмә төзеп, аны чишик:

$$x + 2x = 90.$$
$$3x = 90,$$
$$x = 90 : 3,$$
$$x = 30;\ 30 \cdot 2 = 60.$$

Җавап: $30°$ һәм $60°$.

Мәсьәлә. $2 : 3$ кә чагыштырмасындагы ике почмак туры почмак тәшкил итә. Аларны табарга.



Бирелгән:
BOA — туры почмак.
$\angle 1 : \angle 2 = 2 : 3$.
Табарга:
$\angle 1$ һәм $\angle 2$ ын.

Чишү:

Бер өлешнең зурлыгы x булсын. Ул вакытта $\angle 1 = 2x$; $\angle 2 = 3x$.

Тигезләмә төзеп, аны чишик:

$$2x + 3x = 90,$$
$$5x = 90,$$
$$x = 18.$$
$$18° \cdot 2 = 36°.$$
$$18° \cdot 3 = 54°.$$

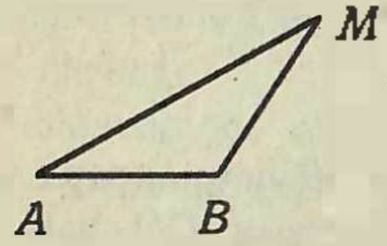
Җавап: $36°$ һәм $54°$.

2 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Почмак нәрсә ул? Почмакның түбәсе нәрсә? Почмакны төзүче нурлар ничек атала?
2. Почмак ничек билгеләнә?
3. Нинди почмак җәелгән почмак дип атала?
4. Җәелгән почмак ничә градуслы?
5. Нәрсә ул градус?
6. Нинди почмак туры почмак дип атала?
7. Туры почмак ничә градуслы?
8. Нинди почмак кысынкы почмак дип атала?
9. Нинди почмак җәенке почмак дип атала?
10. Нинди почмак тулы почмак дип атала?
11. Тулы почмак ничә градуслы?

2 нче контроль эш

1. Кысынкы A, җәенке COD почмакларын төзегез.



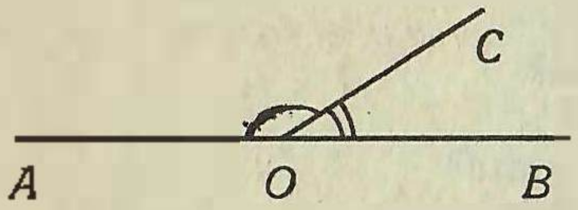
2. Бирелгән рәсемдәге барлык почмакларны үлчәгез һәм язып куегыз.

3. Ике почмак бергә җәенке почмак төзиләр. Аларның берсе икенчесеннән 3 тапкырга зуррак. Бу почмакларны табыгыз.

4. Бер почмак икенчесеннән 20° ка кечерәк. Икесе бергә туры почмак төзиләр. Бу почмакларны табыгыз.

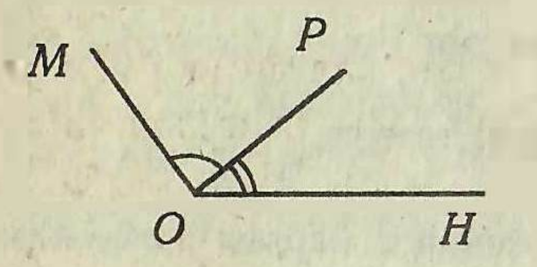
§3. ЧИКТӘШ ҺӘМ ВЕРТИКАЛЬ ПОЧМАКЛАР

Билгеләмә. *Әгәр ике почмакның бер ягы уртак булып, калган ике ягы туры сызыкны тәшкил итсә, алар чиктәш почмаклар дип аталалар.*

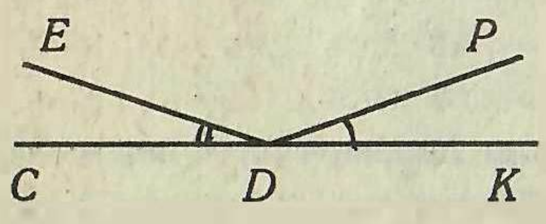


AOC һәм *BOC* чиктәш почмаклар. *OC* аларның уртак ягы, *AO* һәм *BO* бер турыны төзиләр.

“Чиктәш” дигән сүз “күршеләр, янәшә урнашканнар” дигәнне аңлата. Чиктәш почмаклар һәрвакыт икәү була.



MOP һәм *HOP* почмаклары чиктәш түгел. Аларның *OP* яклары уртак булса да, *OM* һәм *OH* яклары бер туры сызыкны тәшкил итмиләр.



CDE һәм *KDP* почмаклары чиктәш түгел. Аларның *CD* һәм *DK* яклары бер туры төзесәләр дә, икенче яклары уртак түгел.

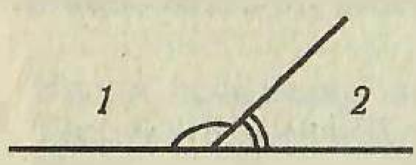
Хәзер без беренче теореманы исбат итәрбез. Ул чиктәш почмаклар турында. *Теорема* — дөреслеген исбатларга кирәк булган математиканың бер җөмләсе.

Теорема 3.1. ***Әгәр почмаклар чиктәш булса, аларның суммасы 180° ка тигез.***

(Теореманы исбатлаганчы, аны исбатлау нигә кирәк икәнен ачыклыйк.) Һәр почмакның зурлыгын үлчәп, аларның суммасы 180° булуына ышанырга мөмкин бит. Ләкин шулай эшләгәндә без теореманы бары тик шушы очрак өчен генә исбат иткән булып чыгабыз. Бүтән пар чиктәш почмаклар өчен кабат шундый үлчәүләр үткәрергә кирәк була.

Әгәр без теореманы, бернинди үлчәүләр үткәрмичә, исбат итәбез икән, ул дөньядагы барлык чиктәш почмаклар өчен дә дөрес булачак. Ул вакытта, чиктәш почмакларны очраткан саен, берни дә үлчәмичә, аларның суммасы 180° ка тигез дип әйтергә мөмкин булачак.

Тагын бер кисәтү. Теореманы исбат итү — ул эш. Ә эшләү өчен нинди дә булса эш коралы кирәк. Ягъни нәрсә дә булса бирелгән булырга тиеш. Гадәттә, теорема ике өлештән тора. Беренче өлеше "әгәр" дип башлана, бу бирелгән өлеш, икенче өлешендә нәрсәне исбат итәргә кирәклеге әйтелә. Һәм ул гадәттә "ул вакытта" дигән сүздән башлана. Безнең теоремада почмакларның чиктәш икәне бирелгән, аларның суммасы 180° ка тигез икәнен исбатларга кирәк. Исбатлый башлыйк.



Бирелгән:
$\angle 1$ һәм $\angle 2$ — чиктәшләр.
Исбатларга:
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

Исбатлау:

Чиктәш почмаклар дип бер яклары уртак, калган ике ягы туры тәшкил итүче почмаклар атала. Ләкин ноктасы билгеләнгән туры җәелгән почмак булып тора. Ул 180° ка тигез. Шулай итеп, ике чиктәш почмак бергә җәелгән почмакка, ягъни 180° ка тигез. Теорема исбат ителде.

(Исбатлауны яттан өйрәнергә кирәкми. Бары тик теореманың үзен: "Әгәр почмаклар чиктәш булса, аларның суммасы 180° ка тигез" дигән укылышын гына яттан белергә кирәк. Исбатлауны үз сүзләрең белән аңлатырга мөмкин. Түбәндәгечә фикер йөртергә мөмкин: "Безгә почмакларның чиктәш икәнлеге бирелгән. Аларның яклары бер туры сызыкны тәшкил итә. Бер ноктасы билгеләнгән туры җәелгән почмак була. Ул 180° ка тигез. Шуңа күрә, чиктәш почмаклар икесе бергә 180° ка тигез".)

Мәсьәлә. Чиктәш почмакларның берсе икенчесеннән 10° ка зуррак. Бу почмакларны табарга.

Бирелгән:
$\angle 1$ һәм $\angle 2$ — чиктәш почмаклар.
Беренче почмак икенче почмактан 10° ка зуррак.
Табарга:
$\angle 1$ һәм $\angle 2$ ын.

Чишү:

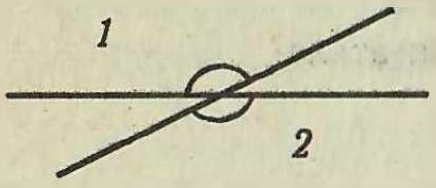
$\angle 2$ ын x дип алыйк, ул вакытта $\angle 1$ $(x + 10)$ була. (Теореманы искә алыйк. Чиктәш почмакларның суммасы 180°.)

Тигезләмә төзибез:

$$x + x + 10 = 180,$$
$$2x = 180 - 10,$$
$$2x = 170,$$
$$x = 170 : 2,$$
$$x = 85,\ 85 + 10 = 95.$$

Җ а в а п: 85° һәм 95°.

Б и л г е л ә м ә. *Әгәр бер почмакның яклары икенче почмак якларының дәвамы булып хезмәт итсә, бу ике почмак вертикаль почмаклар дип атала.*



∠1 һәм ∠2 — вертикаль почмаклар.

Т е о р е м а 3.2. ***Вертикаль почмаклар тигез була.***

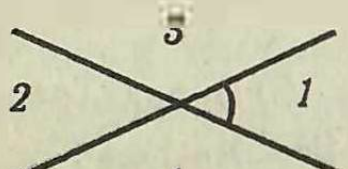
(Бу теоремада “әгәр” дигән сүз юк. Андый теоремалар очраштыра. Биредә почмакларның вертикаль булуы бирелгән, аларның тигезлеген исбатларга кирәк. Моны укучы үзе аңларга тиеш.)

Б и р е л г ә н:
∠1 һәм ∠2 — вертикаль почмаклар.
И с б а т л а р г а:
∠1 = ∠2.

И с б а т л а у:

Бу почмаклардан тыш, рәсемдә тагын ике почмак бар. Аларның берсен ∠3 дип билгелик. ∠1 һәм ∠3 — чиктәш. Аларның суммасы 180°. ∠1 ын табу өчен 180° тан ∠3 ын алырга кирәк: ∠1 = 180° — — ∠3. ∠2 һәм ∠3 — чиктәш почмаклар. Аларның суммасы 180°. ∠2 ын табу өчен 180° тан ∠3 ын алырга кирәк: ∠2 = 180° — ∠3. ∠1 һәм ∠2 бер үк аңлатмага тигез булып килеп чыкты: 180° — ∠3. Димәк, алар бертигез: ∠1 = ∠2. Шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

М и с а л. Ике туры кисешкәндә барлыкка килгән бер почмак 20°. Калган өчесен табарга.



Б и р е л г ә н:
∠1 = 20°.
Т а б а р г а:
∠2; ∠3; ∠4 ын.

Ч и ш ү:

$\angle 1$ һәм $\angle 3$ — чиктәш. Аларның суммасы 180°. $\angle 3$ ын табу өчен 180° тан $\angle 1$ ын алырга кирәк. $\angle 3 = 180° - 20° = 160°$.

$\angle 1$ һәм $\angle 2$ — вертикаль почмаклар. $\angle 3$ һәм $\angle 4$ — вертикаль почмаклар. $\angle 4 = 160°$.

Алар теорема 3. 2 буенча тигез. $\angle 2 = 20°$.

Җ а в а п: 160°; 20°; 160°.

3 НЧЕ ЗАЧЕТ

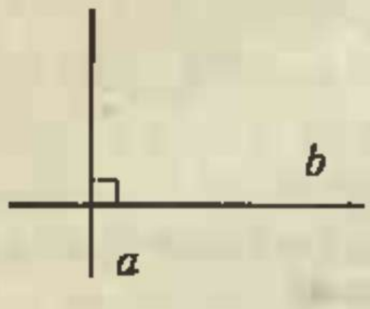
1. Нинди почмаклар чиктәш почмаклар дип атала?
2. Теорема 3.1 не исбатлагыз.
3. Нинди почмаклар вертикаль почмаклар дип атала?
4. Теорема 3.2 не исбатлагыз

3 нче контроль эш

1. Бер почмагы 50° ка тигез булган чиктәш почмаклар сызыгыз.
2. Бер почмагы 120° ка тигез булган вертикаль почмаклар сызыгыз.
3. Чиктәш почмакларның берсе икенчесеннән 4 тапкырга зуррак. Аларны табыгыз.

§ 4. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ҺӘМ ПАРАЛЛЕЛЬ ТУРЫЛАР

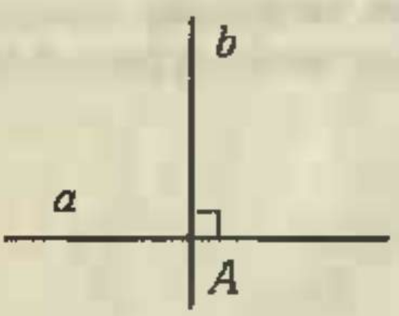
Билгеләмә. *Туры почмак ясап кисешүче ике туры перпендикуляр турылар дип атала.*



a һәм *b* турылары перпендикуляр турылар

"Перпендикуляр" сүзе урынына язганда "⊥" тамгасы кулланалар. "$a \perp b$" язмасы болай укыла: "*a* турысы *b* турысына перпендикуляр".

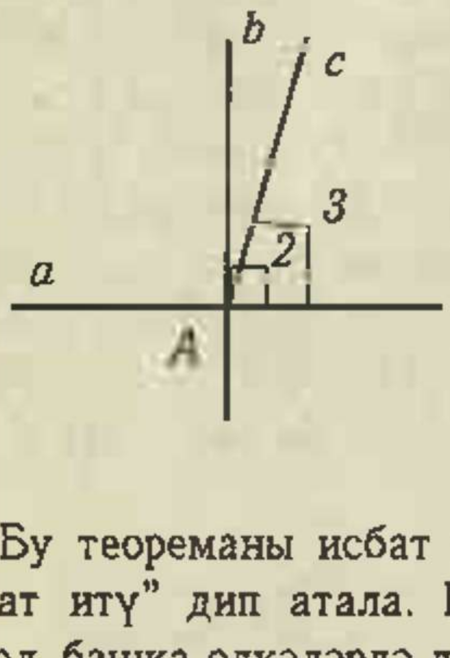
Теорема 4.1. ***Турының һәр ноктасы аша, аңа перпендикуляр итеп туры үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.***



Бирелгән:
$a \perp b$.
Исбатларга:
b a турысына перпендикуляр булган бердәнбер туры.

Исбатлау:

A ноктасы аша узучы һәм *a* турысына перпендикуляр тагын бер туры бар дип уйлыйк. Ул *c* турысы булсын ди.



∠2 — туры почмак, ул 90° ка тигез, чөнки шарт буенча $a \perp b$. Шулай ук ∠3 да туры, чөнки без $a \perp c$ дип уйладык. Ләкин ∠3 2 почмагының бер өлешен генә тәшкил итә. Почмакның бер өлеше почмакның үзенә тигез булып чыкты, ә болай булырга мөмкин түгел. Димәк, безнең фараз дөрес түгел, шуңа күрә, *b a* турысына перпендикуляр булган бердәнбер туры, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Бу теореманы исбат иткәндә без кулланган ысул "каршы куеп исбат итү" дип атала. Исбатлауның бу ысулы, геометриядә генә түгел, башка өлкәләрдә дә кулланыла. Шушы ысул белән исбатлауга геометриягә кагылышлы булмаган мисал китерик.

М ә с ь ә л ә: Әгәр колоннада беренче булып ир кеше басып торса һәм һәр ир кеше артыннан ир кеше килсә, колоннада барысы да ир кешеләр.

Бирелгән:

Беренче булып ир кеше тора.

Һәр ир кеше артыннан ир кеше тора.

Исбатларга:

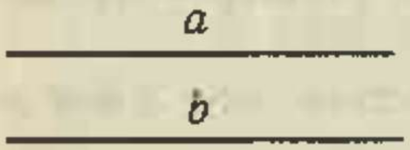
Колоннада барысы да ир кешеләр.

Исбатлау:

Без колоннада хатын-кызлар бармы, әллә юкмы икәнен белмибез. Шуның капма-каршысын фараз итик: безгә колоннада хатын-кызлар юк икәнен исбатларга кирәк, ә без бер булса да бар дип уйлыйк. Ул кайда басып торырга мөмкин соң? Беренче урында мөмкин түгел, анда бирелеш буенча ир кеше басып тора. Икенче урында да түгел, чөнки ир кеше артыннан ир кеше тора. Өченче урында да мөмкин түгел, һәм шулай дәвам итә. Димәк, хатын-кыз өчен урын юк. Безнең фараз итү дөрес булмады. Һәм бу теореманы исбатлый да инде.

Каршы куеп исбатлауны исбатлау авыр булган очракта кулланалар. Ул вакытта капма-каршысын фараз итәләр һәм моннан нәрсә килеп чыкканын карыйлар. 4.1 теоремасында өлеш бөтенгә тигез булды, икенче теоремада, исә, хатын-кыз колоннада үзе бар, ә урыны юк икәне килеп чыкты. Димәк, теоремалар шуларның капма-каршысын исбатлыйлар. Алда да без исбатлауның бу ысулын еш кулланырбыз.

Б и л г е л ә м ә. *Бер яссылыкта ятучы ике туры кисешмәсә, алар параллель турылар дип атала.*



a һәм b турылары параллель турылар

Турыларның параллель икәнен күрсәтү өчен "$\|$" тамгасы кулланыла. "$a \| b$" язмасы болай укыла: "a турысы b турысына параллель".

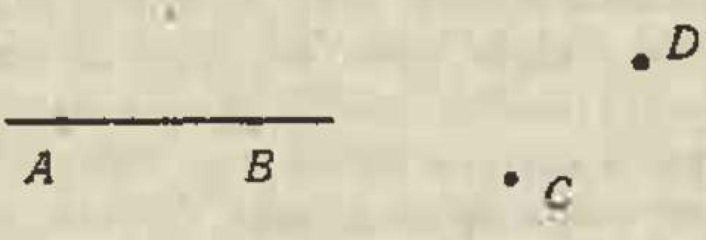
Сез инде геометриядә билгеләмәләр белән таныштыгыз. Бер ноктадан чыгучы ике нур ярдәмендә ясалган фигураның почмак дип аталганын да беләсез. Ә нәрсә соң ул нур? Бу билгеләмәне дә онытмагансыздыр. Нур ул турының бер яктан чикләнгән өлеше. Ә нәрсә соң ул туры? Нәрсә ул нокта? Ноктаның, турының, яссылыкның, еракланың билгеләмәләре юк. Алар барлык кешегә дә билгеле дип исәпләнә, һәркем аларны күз алдына китерә ала. Бу төшенчәләр билгеләмәләрдән башка кабул ителәләр. Нәрсәдән дә булса башларга

кирәк бит инде. Ләкин калган барлык төшенчәләр билгеләнәләр, һәм геометриянең барлык билгеләмәләре шушы төшенчәләргә таяналар.

Геометрия кешенең практик ихтыяҗларыннан барлыкка килде. Меңьеллык тәҗрибә нигезендә кеше нокта, туры, яссылык һәм ераклыкларның кайбер үзлекләрен ачты.

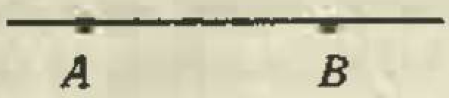
Геометриядә тәҗрибәгә нигезләнгән һәм исбатлауларсыз кабул ителгән җөмләләрне *аксиомалар* дип атыйлар. Аксиомалар бик гади һәм ачык аңлаешлы.

Аксиома 1 (А1). *Турыда ятучы нокталар да, турыда ятмаучы нокталар да бар.*



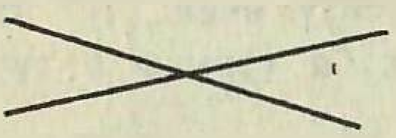
Чынлап та, турыда теләсә нинди урынга нокта куярга мөмкин. Һәм турыдан читтә теләсә кайсы урынга да нокта куярга була. Һәм бу бер кешедә дә шик тудырмый.

Аксиома 2 (А2). *Ике нокта аша туры үткәрергә мөмкин, һәм бары тик берне генә.*



Әле беркемнең дә төрле ике нокта аша төрле ике туры үткәрә алганы юк. Ике нокта аша кәкреләрне күпне үткәрергә мөмкин, ә турыны берне генә.

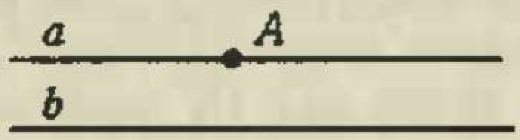
Аксиома 3 (А3). *Төрле ике туры я кисешмиләр, я бер генә ноктада кисешәләр.*



Турылар кисешә

Турылар кисешми

Аксиома 4 (А4). *Бирелгән турыда ятмаган нокта аша, шушы турыга параллель итеп, бер генә туры үткәрергә мөмкин.*



a турысы *A* ноктасы аша үтә һәм *b* турысына параллель.

Шулай итеп, сез геометриянең җөмләләре белән таныштыгыз:

Билгеләмә — геометрик фигураның ничек аталуы әйтелгән җөмлә.

Теорема — исбатланырга тиешле җөмлә.

Аксиома — исбатлаусыз кабул ителә торган җөмлә.

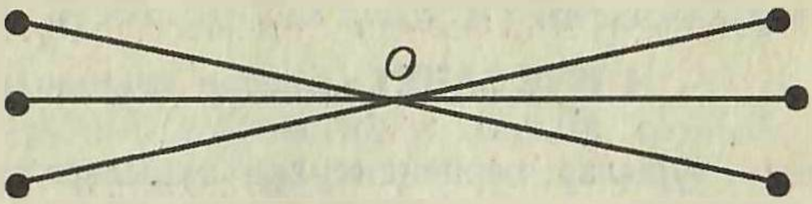
4 НЧЕ ЗАЧЕТ (*телдән контроль эш*)

1. Нинди турылар перпендикуляр турылар дип атала? Алар ничек билгеләнәләр?
2. Нинди турылар параллель турылар дип атала? Алар ничек билгеләнә?
3. Нәрсә ул аксиома?
4. 4.1 теоремасын исбатлагыз.
5. A1, A2, A3, A4 аксиомаларын әйтегез.

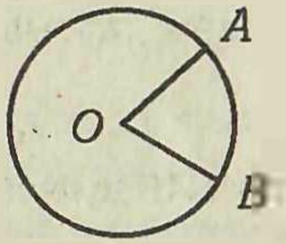
§ 5. ӘЙЛӘНӘ

Яссылыкта бер нокта алыйк. Бу ноктадан 3 см ераклыкта яткан ноктаны табыйк.

Бирелгән O ноктасыннан 3 см га ераклашкан нокталарны тагын табарга мөмкин.



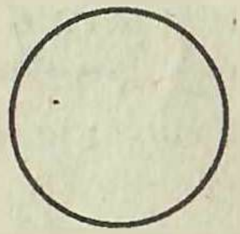
Б и л г е л ә м ә. *Яссылыкның бирелгән ноктадан тигез ераклыкта урнашкан барлык нокталарыннан торган фигура әйләнә дип атала.*



Бу — әйләнә. O — аның үзәге, OA һәм OB — радиуслары

Б и л г е л ә м ә. *Яссылыкның әйләнә белән чикләнгән өлеше түгәрәк дип атала.*

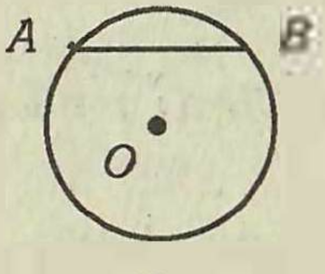
Бу — түгәрәк



Бу — әйләнә

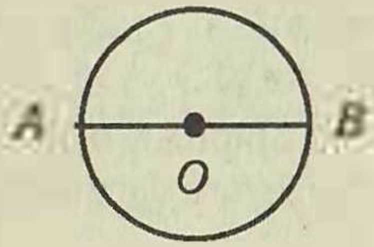
Әйләнәне җептән, резинкадан, тимер чыбыктан эшләп була. Түгәрәкне кәгазьдән, фанердан, тимердән кисеп ясарга мөмкин.

Б и л г е л ә м ә. *Әйләнәнең ике ноктасын тоташтыручы кисемтә хорда дип атала.*



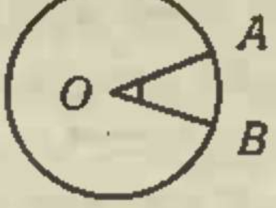
Бу AB хордасы

Б и л г е л ә м ә. *Үзәк аша узучы хорда диаметр дип атала.*



Бу AB диаметры

Б и л г е л ә м ә. *Ике радиус ярдәмендә ясалган почмак үзәк почмак дип атала.*

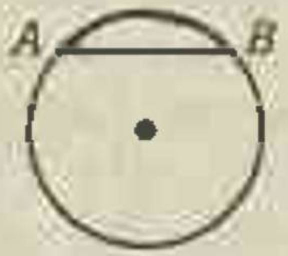


Үзәк *AOB* почмагы

Б и л г е л ә м ә. *Әйләнәнең бер өлеше дуга дип атала.*

AB дугасы

Һәрбер дугага үзенең хордасы тиңдәш була, һәм киресенчә, һәрбер хордага үзенең дугасы тиңдәш. Хорда дуганы тартып тора диләр.

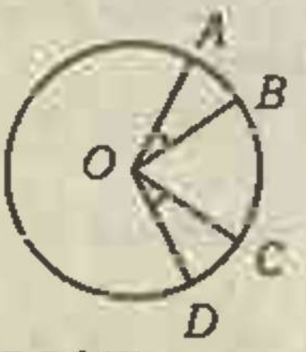


AB хордасы *AB* дугасын тартып тора

Б и л г е л ә м ә. ***Берсе өстенә икенчесен салганда тәңгәл килә торган фигуралар тигез фигуралар дип аталалар.***

Ике фигураның тигезлеген тикшерүнең иң гади ысулы шуннан гыйбарәт: бер фигураны кисеп алырга һәм икенчесе өстенә салырга кирәк. Әгәр фигуралар тәңгәл килсә, алар тигез; әгәр инде тәңгәл килмәсәләр, тигез түгел.

Т е о р е м а 5.1. ***Әгәр бер әйләнәдә ике үзәк почмак тигез булса, аларга тиңдәш дугалар да тигез була.***



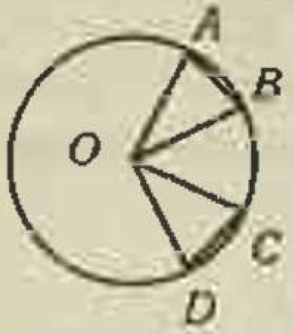
Б и р е л г ә н:
$\angle AOB$ һәм $\angle COD$ — үзәк почмаклар.
$\angle AOB = \angle COD$.
И с б а т л а р г а:
AB дугасы *CD* дугасына тигез

И с б а т л а у:

COD фигурасын кисеп алабыз һәм аны, *AOB* почмагы *COD* почмагына туры килерлек итеп, *AOB* фигурасы өстенә салабыз дип уйлыйк. Почмаклар тәңгәл киләләр, чөнки алар бирелеш буенча тигез. *AO* белән *CO* тәңгәл килә, *BO* белән *DO* тәңгәл килә, чөнки алар бер әйләнәнең радиуслары, димәк, дугаларның очлары да тәңгәл килә. Ә дугаларның очлары тәңгәл килгәч, бу дугалар үзләре дә

тәңгәл килә, чөнки алар бер әйләнә дугалары. Шулай итеп, дугалар тәңгәл килде, димәк, алар тигез, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Бу теоремадан шундый нәтиҗә чыга: әгәр бер әйләнәдә ике үзәк почмак тигез булса, аларга тиңдәш хордалар да тигез була.



Бирелгән:
$\angle AOB$ һәм $\angle COD$ — үзәк почмаклар,
$\angle AOB = \angle COD$.
Исбатларга:
AB хордасы *CD* хордасына тигез.

Исбатлау:

AOB фигурасын кисеп алабыз һәм аны, *AOB* почмагы *COD* почмагына туры килерлек итеп, *COD* фигурасы өстенә салабыз дип уйлыйк. Почмаклар тәңгәл киләләр, чөнки алар бирелеш буенча тигез. *AO* белән *CO*, *BO* белән *DO* тәңгәл килә, чөнки алар бер әйләнә радиуслары. *A* ноктасы *C* ноктасы белән, *B* ноктасы *D* ноктасы белән тәңгәл киләләр. Ләкин A2 аксиомасы буенча ике нокта аша бер генә туры үткәрергә мөмкин, шуңа күрә *AB* кисемтәсе *CD* кисемтәсе белән тәңгәл килә, ягъни алар тигез, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Нәтиҗә — ул шулай ук теорема. Аерма шунда, ул төп теоремага өстәмә рәвештә исбатлана.

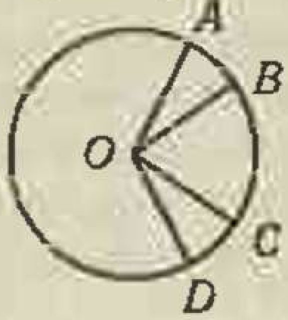
Бирелгән теоремага кире теорема төзик. Моның өчен теореманың шарты белән нәтиҗәсенең урыннарын алмаштырабыз. Безгә дугаларның тигезлеген исбатларга кирәк иде. Кире теоремада бу бирелеш була. Безгә үзәк почмаклар тигез дип бирелгән иде, кире теоремада исә шуны исбатларга кирәк.

Теорема 5.2. ***Әгәр бер әйләнәдә дугалар тигез булса, аларга тиңдәш үзәк почмаклар да тигез.***

1 нче нәтиҗә. ***Әгәр бер әйләнәдә дугалар тигез булса, аларны тартып торучы хордалар да тигез.***

2 нче нәтиҗә. ***Әгәр бер әйләнәдә хордалар тигез булса, аларга тиңдәш дугалар да тигез.***

3 нче нәтиҗә. ***Әгәр бер әйләнәдә хордалар тигез булса, аларга тиңдәш үзәк почмаклар да тигез.***

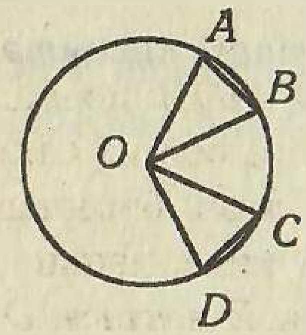


Бирелгән:
AB дугасы *CD* дугасына тигез.
Исбатларга:
$\angle AOB = \angle COD$.

5.2 теоремасын и с б а т л а у.

("4" һәм "5" билгеләре алу өчен исбатлау мәҗбүри.)

COD фигурасын кисеп алып, аны *CD* дугасы *AB* дугасында ятарлык итеп, *AOB* фигурасына салабыз дип уйлыйк. Алар тәңгәл килерләр, чөнки алар бирелеш буенча тигез. *AO* белән *CO*, *OB* белән *DO* тәңгәл килә, чөнки алар бер үк әйләнә радиуслары. Шулай итеп, фигуралар тәңгәл килә, моннан аларның тигезлеге килеп чыга һәм, димәк, *AOB* почмагы *COD* почмагына тигез, шуны исбатларга кирәк иде дә.



Б и р е л г ә н:
AB дугасы *CD* дугасына тигез.
И с б а т л а р г а:
$AB = CD$.

1 нче нәтиҗәне и с б а т л а у:

("4" һәм"5" билгеләре алу өчен исбатлау мәҗбүри.)

COD фигурасын кисеп алабыз һәм аны *CD* дугасы *AB* дугасына туры килерлек итеп, *AOB* фигурасына салабыз дип уйлыйк. Дугалар тәңгәл килә, чөнки алар бирелеш буенча тигез. *BO* белән *DO*, *AO* белән *CO* тәңгәл килә, чөнки алар бер әйләнә радиуслары. Шулай итеп, фигуралар тәңгәл килде, димәк, алар тигез, димәк, $AB = CD$, шуны исбатларга кирәк иде дә.

2 нче һәм 3 нче нәтиҗәләр 1 нче нәтиҗәгә охшаш исбатланалар. Сез кире теорема белән таныштыгыз. Аны төзүе җиңел. Моның өчен бирелгән теореманың шарты белән нәтиҗәсенең урыннарын алыштырырга кирәк. Ләкин бер раслама дөрес икән, аңа кире раслама да дөрес дип уйларга ярамый. Кире теорема дөрес булырга да мөмкин, дөрес булмаска да мөмкин. Мисаллар китерик.

Туры раслама: "Әгәр укучының билгеләре гел бишле генә булса, ул отличник".

Кире раслама: "Әгәр укучы отличник булса, аның билгеләре гел бишле генә".

Ике раслама да дөрес.

Туры раслама: "Әгәр укучының исеме Азат булса, ул малай кеше".

Кире раслама: "Әгәр укучы малай булса, аның исеме Азат".

Туры раслама дөрес, ә киресе дөрес түгел. Һәрбер малай да Азат исемле түгел.

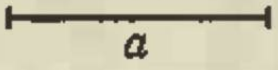
Югарыда күренгәнчә, теоремаларга һәм расламаларга кире

теоремалар һәм расламалар була. Бу кире теоремалар дөрес һәм дөрес булмаска мөмкин. Шуңа күрә аларны исбатларга кирәк.

Өйрәнелгән теоремаларны төзүгә мәсьәләләр чишкәндә кулланып карыйк. Сезнең инде нинди дер рәсем ясауны таләп итүче мәсьәләләрне очратканыгыз бар. Сызымны трафарет белән, яки кулдан ясарга мөмкин. Геометриядә, исә, төзүгә мәсьәләләр бар. Бу мәсьәләләр бик борынгы заманнарда барлыкка килгәннәр, ул вакытта циркуль белән линейкадан башка инструментлар булмаган. Шул вакыттан бирле төзүгә мәсьәләләр бары тик циркуль һәм линейка ярдәмендә генә башкарыла, ә линейкада бүлемнәр юк дип исәпләнә.

1 нче мәсьәлә. *Бирелгән кисемтәгә тигез кисемтә төзергә.*

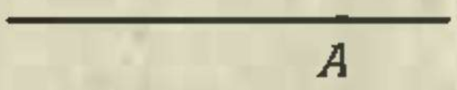
Бирелгән:



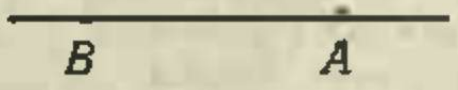
Төзү:

1. Туры сызык сызабыз.

2. Анда *A* ноктасы куябыз.



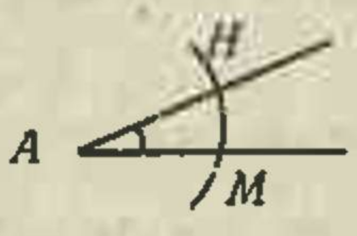
3. Циркуль ярдәмендә бирелгән *a* кисемтәсен үлчибез һәм турыда, *A* ноктасыннан башлап, *AB* кисемтәсе төзибез.



a һәм *AB* кисемтәләре тигез, чөнки алар бер үк озынлыкта.

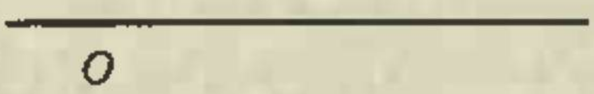
2 нче мәсьәлә. Бирелгән почмакка тигез почмак төзергә.

Бирелгән:



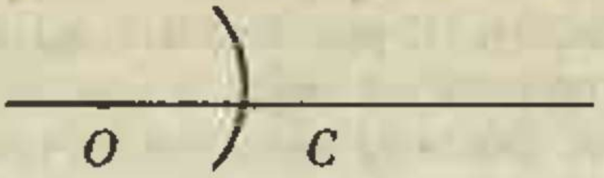
Төзү:

1. Туры сызык сызабыз һәм анда *O* ноктасы билгелибез.

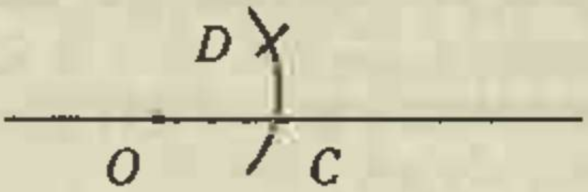


2. Бирелгән *MAH* почмагында теләсә нинди радиус белән дуга үткәрәбез. *M* һәм *H* нокталары табылды.

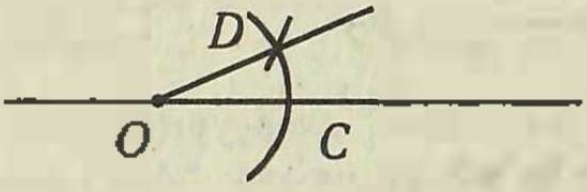
3. Шундый ук радиус белән *O* үзәкле дуга үткәрәбез, турыда *C* ноктасы табыла.



4. Циркуль белән *MH* ераклыгын үлчибез һәм *C* ноктасыннан башлап, дугада тамга ясыйбыз. *D* ноктасы табыла.



5. *D* һәм *O* нокталарын тоташтырабыз. *A* һәм *COD* почмаклары 5.2 теоремасы һәм аның 3 нче нәтиҗәсе буенча тигез.



5 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Нәрсә ул әйләнә? (Әйләнәнең билгеләмәсе.)
2. Нәрсә ул радиус?
3. Нәрсә ул түгәрәк?
4. Хорда дип нәрсә атала? (Хорданың билгеләмәсе.)
5. Нәрсә ул диаметр?
6. Нинди почмак үзәк почмак дип атала?
7. Нәрсә ул дуга?
8. Нинди фигуралар тигез фигуралар дип аталалар?
9. 5.1 теоремасын һәм 1 нче нәтиҗәне исбатлагыз.
10. 5.2 теоремасын һәм 1 нче нәтиҗәне әйтегез.
("4" һәм "5" билгеләре алу өчен аларны исбатларга кирәк.)
11. 5.2 теоремасының 2 нче һәм 3 нче нәтиҗәләренең укылышын әйтегез.
12. Бирелгән кисемтәгә тигез кисемтәне ничек төзергә?
13. Бирелгән почмакка тигез почмакны ничек төзергә?

5 нче контроль эш

1. 2 см радиуслы әйләнә сызыгыз һәм анда, үзара 40° лы почмак ясарлык итеп, *AB* кордасы һәм *CA* диаметры үткәрегез.

2. Диаметры 5 см булган әйләнә сызыгыз һәм анда 100° лы үзәк почмак төзегез.

Бу почмакка тиңдәш хорданы үлчәгез.

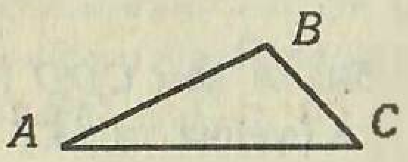
3. Әйләнәнең *AB* һәм *CD* хордалары *M* ноктасында кисешә. *AMC* почмагы 50°. *CMB* почмагын табыгыз.

§ 6 ӨЧПОЧМАКЛАР ТИГЕЗЛЕГЕНЕҢ БЕРЕНЧЕ һӘМ ИКЕНЧЕ БИЛГЕЛӘРЕ

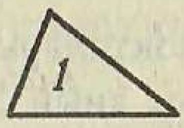
Б и л г е л ә м ә. *Бер турыда ятмаган өч ноктаны тоташтыручы өч кисемтә белән чикләнгән яссы фигура өчпочмак дип атала.*

Нокталар — өчпочмакның *түбәләре* дип, ә кисемтәләр аның *яклары* дип аталалар.

Өчпочмак түбәләрен күрсәтүче өч хәреф яки цифр белән тамгалана.



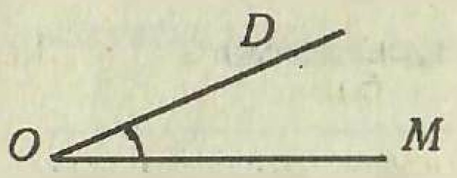
ABC өчпочмагы



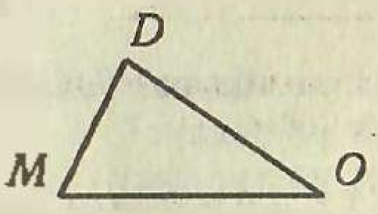
1 өчпочмагы

Кыскалык өчен "өчпочмак" сүзе урынына △ тамгасы кулланалар. "△*ABC*" дигән язылыш болай укыла: "*ABC* өчпочмагы".

Өчпочмак белән почмакны бутамагыз.



Бу *MOD* почмагы



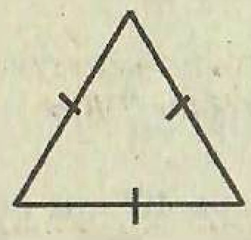
Бу *MOD* өчпочмагы

Өчпочмакны түбәләрен күрсәтеп тамгалаганда кайсы түбәдән башласаң да ярый.

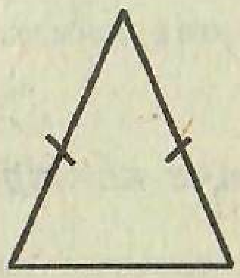
△*ABC*, △*BAC*, △*BCA* — бер үк өчпочмак.

Якларының озынлыкларына һәм почмакларының зурлыкларына карап, өчпочмаклар бер-берсеннән аерылалар.

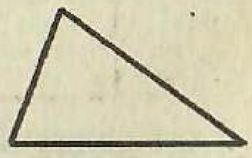
Яклары буенча:



Барлык яклары да тигез



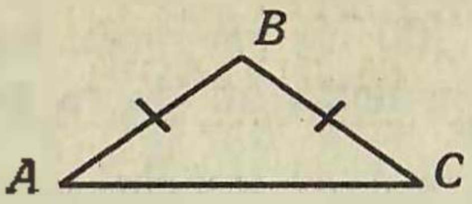
Ике ягы тигез



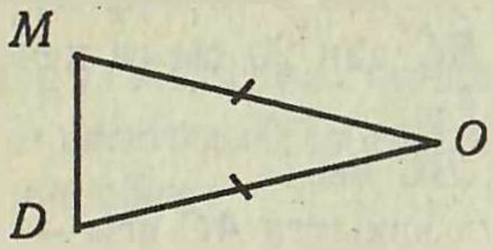
Яклары төрле озынлыкта

Б и л г е л ә м ә. *Ике тигез ягы булган өчпочмак тигезьянлы өчпочмак дип атала.*

Бу тигез яклар өчпочмакның *ян* яклары дип, ә өченче ягы *нигезе* дип атала.



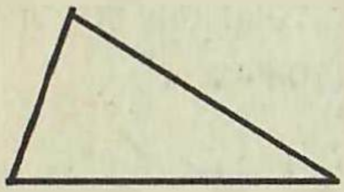
ABC өчпочмагы — тигезьянлы,
AC аның нигезе



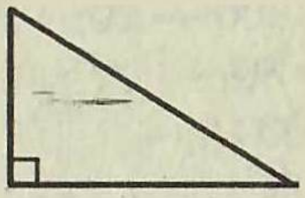
MOD өчпочмагы — тигезьянлы,
MD аның нигезе

Билгеләмә. *Барлык яклары да тигез булган өчпочмак тигезьяклы өчпочмак дип атала.*

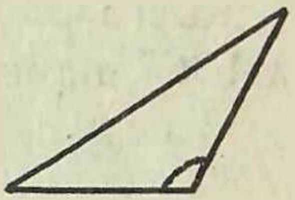
Почмаклары буенча:



Барлык почмаклары да кысынкы

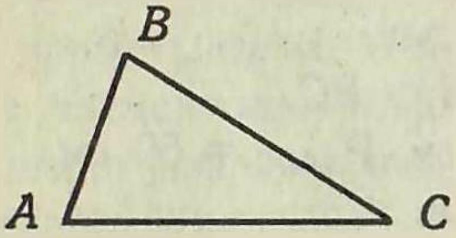


Бер туры почмагы бар



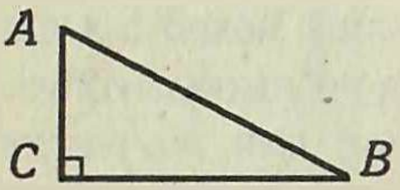
Җөенке почмагы бар

Билгеләмә. *Барлык почмаклары да кысынкы булган өчпочмак кысынкыпочмаклы өчпочмак дип атала.*



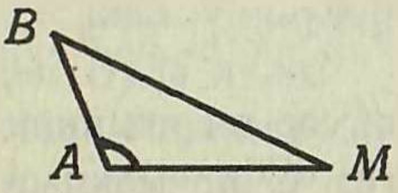
$\triangle ABC$ — кысынкыпочмаклы

Билгеләмә. *Туры почмагы булган өчпочмак турыпочмаклы өчпочмак дип атала.*



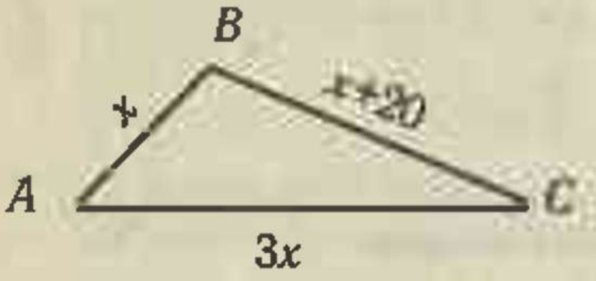
$\triangle ABC$ — турыпочмаклы,
аның *C* почмагы туры

Билгеләмә. *Җәенке почмагы булган өчпочмак җәенкепочмаклы өчпочмак дип атала.*



$\triangle ABM$ — җөенкепочмаклы,
аның *A* почмагы җөенке.

Мисал. Өчпочмакның периметры 100 см га тигез. Бер ягы икенче ягыннан 3 тапкырга, ә өченче ягыннан 20 см га кечерәк. Өчпочмакның якларын табарга.



Бирелгән:
$\triangle ABC$, $P_{\triangle ABC} = 100$ см.
AB ягы AC дан 3 тапкыр кечерәк,
AB ягы BC дан 20 см га кечерәк.
Табарга:
AB, AC, BC ны.

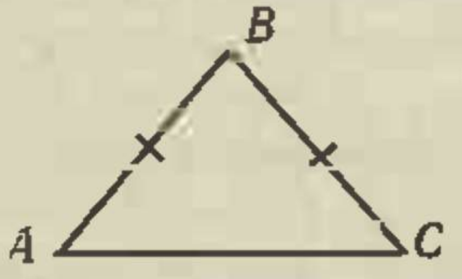
Чишү: AB ягын x см дип алсак, ул вакытта AC ягы — $(3x)$ см һәм BC ягы $(x+20)$ см булыр.

Тигезләмә төзибез:

$$x + 3x + x + 20 = 100,$$
$$5x + 20 = 100,$$
$$5x = 100 - 20,$$
$$5x = 80,$$
$$x = 80 : 5,$$
$$x = 16,$$
$$16 \cdot 3 = 48,\ 16 + 20 = 36.$$

Җавап: 16 см, 48 см, 36 см.

Мисал. Тигезьянлы өчпочмакның периметры 50 см га тигез, ян ягы 22 см. Нигезе күпмегә тигез?



Бирелгән:
$\triangle ABC$, $AB = BC$,
$AB = 22$ см, $P_{\triangle ABC} = 50$ см.
Табарга:
AC ны.

Чишү: Өчпочмак тигезьянлы булганга, аның ике ягы тигез, $AB = BC = 22$ см. Нигезен табу өчен, 50 см дан 2 тапкыр 22 см ны алырга кирәк.

$AC = 50 - 22 - 22 = 6$.

Җавап: 6 см.

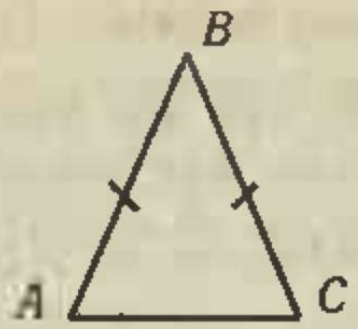
Бу мәсьәләне икенче юл белән дә чишәргә мөмкин булыр иде.

Нигезен x см дип билгеләсәк, ул вакытта тигезләмә төзеп була:

$$x + 22 + 22 = 50,$$
$$x = 50 - 22 - 22 = 6.$$

Җавап: 6 см.

Мисал: Тигезьянлы өчпочмакның нигезе ян ягыннан 10 см га кечерәк, ә аның периметры 80 см га тигез. Өчпочмакның якларын табарга.



Бирелгән:
$\triangle ABC$, $P_{\triangle ABC} = 80$ см,
$AB = BC$, AC ягы AB дан 10 см гә ким.

Табарга:
AB, AC, BC ны.

Чишү. AC ягын x см дип алсак, ул вакытта ян яклары $(x + 10)$ см була. Периметры 80 см га тигез булганлыктан, түбәндәге тигезләмәне төзеп, чишәбез:

$$x + x + 10 + x + 10 = 80,$$
$$3x + 20 = 80,$$
$$3x = 80 - 20,$$
$$3x = 60,$$
$$x = 60 : 3,$$
$$x = 20,$$
$$20 + 10 = 30.$$

Җавап: 30 см, 30 см, 20 см.

Узган параграфта без бер-берсе өстенә салганда тәңгәл килгән фигураларны тигез фигуралар дип атадык.

Өчпочмаклар — геометрик фигуралар, һәм, ике өчпочмакның үзара тигезлеген тикшерү өчен, берсен кисеп алып, икенчесе өстенә салып карарга кирәк. Әгәр өчпочмаклар тәңгәл килсәләр, аларның барлык элементлары: барлык яклары, барлык почмаклары тәңгәл килә, ягъни аларның өчәр пар тигез яклары һәм өчәр пар тигез почмаклары була.

Тигезлекне тикшерүнең бу ысулы бик гади, ләкин аны һәрвакытта да кулланып булмый. Чөнки һәрвакытта да өчпочмакны кисеп алу мөмкин түгел.

Башка юл белән эшләргә дә мөмкин.

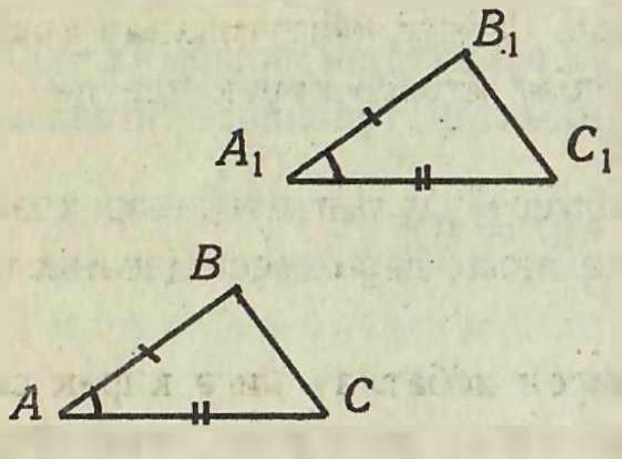
Бер өчпочмакның өч ягын, өч почмагын үлчәп алырга һәм икенче өчпочмакның өч ягы һәм өч почмагы белән чагыштырып карарга кирәк. Әгәр барлык яклар һәм почмаклар пар-пар тигез булса, өчпочмаклар да тигез була. Ләкин моның өчен 6 тапкыр үлчәм алырга кирәк.

Азрак санда үлчәүләр үткәреп, өчпочмаклар тигезлеген белеп булмыймы? Була икән.

Без хәзер өчпочмаклар тигезлегенең билгеләре дип аталган ике теореманы исбат итәрбез.

Өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе

Теорема 6.1. *Әгәр бер өчпочмакның ике ягы һәм алар арасындагы почмагы икенче өчпочмакның ике ягына һәм алар арасындагы почмагына тиңдәшле рәвештә тигез булса, ул өчпочмаклар тигез була.*



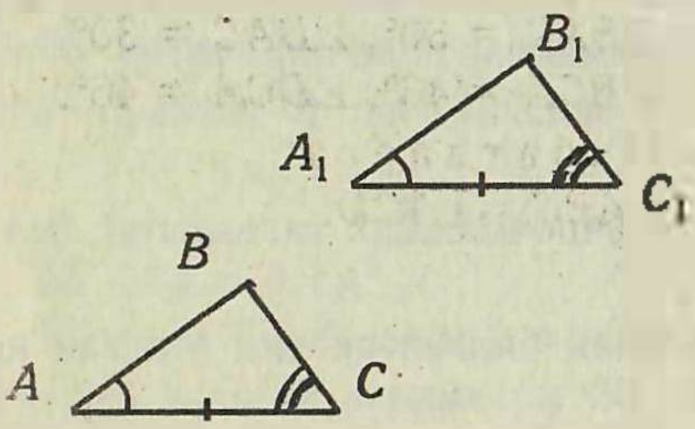
Бирелгән:
$\triangle ABC$ һәм $\triangle A_1B_1C_1$,
$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$.
Исбатларга:
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Исбатлау:
$A_1B_1C_1$ өчпочмагын кисеп алып, A почмагына A_1 почмагы туры килерлек итеп, ABC өчпочмагы өстенә салабыз дип уйлыйбыз. A почмагы белән A_1 почмагы тәңгәл килә, чөнки алар шарт буенча тигез.

Ике нокта аша бер генә кисемтә үткәреп булганлыктан (аксиома А2), B_1C_1 кисемтәсе BC кисемтәсе белән тәңгәл килер. Өчпочмаклар тәңгәл килде, димәк, алар тигез, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Өчпочмаклар тигезлегенең икенче билгесе

Теорема 6.2. *Әгәр бер өчпочмакның ягы һәм шул як янындагы ике почмагы икенче өчпочмакның ягына һәм шул як янындагы ике почмагына тиңдәшле рәвештә тигез булса, андый өчпочмаклар тигез була.* ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга кирәк.)



Бирелгән:
$\triangle ABC$ һәм $\triangle A_1B_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$,
$AC = A_1C_1$.
Исбатларга:
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Исбатлау:

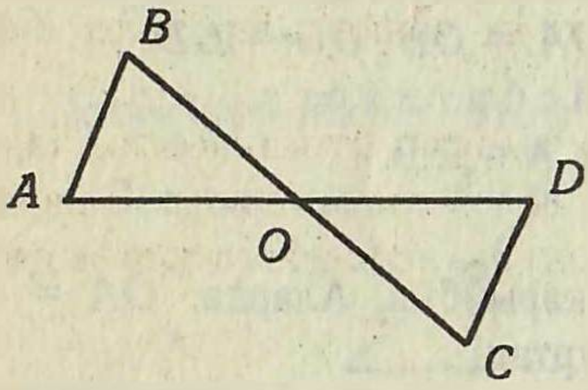
$A_1B_1C_1$ өчпочмагын кисеп алып, A_1C_1 ягын AC ягы буенча китәрлек итеп, ABC өчпочмагы өстенә салабыз дип уйлыйбыз. A_1C_1 ягы белән AC тәңгәл килер, чөнки A_1C_1 ягы AC ягына шарт буенча тигез. Шарт буенча A_1 почмагы A почмагына, C почмагы C_1 почмагына тигез булганлыктан, A_1B_1 ягы AB ягы буенча, B_1C_1 ягы BC ягы буенча китәр. Ике туры бер генә ноктада кисешә алганлыктан, B_1 ноктасы B ноктасы белән тәңгәл килә. Димәк, өчпочмаклар тәңгәл килә, шунлыктан алар тигез, шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

"Билге" сүзе нәрсәне аңлата соң?

Мисал китерик. Офицерлар "билгесе" булып погоннар хезмәт итә, ә андагы йолдызлар саны буенча аның дәрәҗәсен (званиесен) билгеләргә мөмкин.

Өчпочмакларның тигезлек билгеләрен исбатлау нигә кирәк соң? Аларны исбатлау өчпочмакта 6 шар үлчәү уздырмас өчен кирәк булды. Өчпочмакларның тигезлеге турында нәтиҗә ясау өчен, аларның 3 әр пар тигез элементларын табу җитә.

Мисал.



Бирелгән:
$AO = OD$, $CO = OB$.
Исбатларга:
$\triangle ABO = \triangle CDO$.

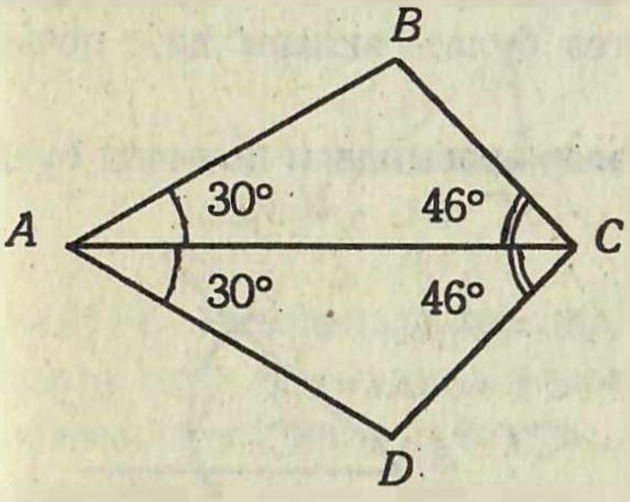
Исбатлау:

ABO һәм CDO өчпочмакларын тикшерик. Аларда: $AO = OD$, $CO = OB$ (шарт буенча),

$\angle AOB = \angle COD$ — вертикаль почмаклар буларак.

Нәтиҗә: беренче билге буенча өчпочмаклар тигез.

Мисал.



Бирелгән:
$\angle BAC = 30°$, $\angle DAC = 30°$,
$\angle BCA = 46°$, $\angle DCA = 46°$.
Исбатларга:
$\triangle ABC = \triangle ACD$.

И с б а т л а у:

$\begin{cases} \angle BAC = \angle DAC = 30°, \\ \angle BCA = \angle DCA = 46° \end{cases}$ — шарт буенча,

AC ягы уртак.

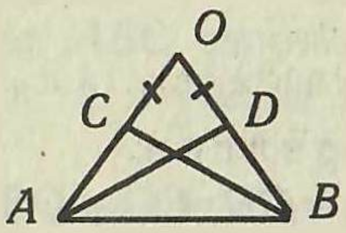
Н ә т и җ ә: икенче билге буенча өчпочмаклар тигез.

Өчпочмаклар тигезлеген исбатлауга карата мәсьәләләр чишү кагыйдәләре

Өчпочмаклар тигезлеген исбатлауга карата мәсьәләләр чишү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1. Ике өчпочмакны карарга һәм өч пар тигез элементларны табарга.
2. Әгәр ике ягы һәм алар арасындагы почмагы тигез булса, ул вакытта өчпочмаклар беренче билге буенча тигез.
3. Әгәр ягы һәм шул як янындагы ике почмагы тигез булса, өчпочмаклар икенче билге буенча тигез булалар.

М и с а л.



Б и р е л г ә н:
$OA = OB$, $OC = OD$.
И с б а т л а р г а:
$\angle A = \angle B$.

И с б а т л а у:

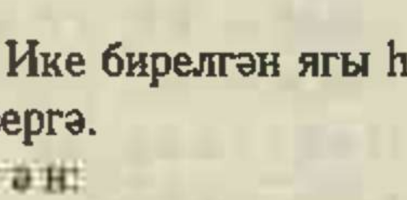
AOD һәм BOC өчпочмакларын карыйбыз. Аларда: $OA = OB$, $OC = OD$ — шарт буенча, $\angle O$ — уртак.

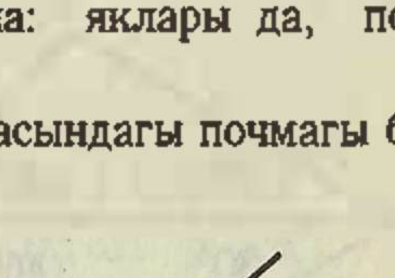
Н ә т и җ ә: беренче билге буенча өчпочмаклар тигез ($\triangle AOD = \triangle BOC$). Әгәр өчпочмаклар тигез булса, аларның пар-пар барлык элементлары да тигез була. Моннан $\angle A = \angle B$ икәне килеп чыга.

Кагыйдә. Әгәр мәсьәләдә якларының яки почмакларының тигезлеген исбатларга кирәк булса, башта өчпочмакларның тигезлеген исбатларга кирәк. Әгәр өчпочмаклар тигез булса, аларның барлык элементлары да пар-пар тигез була: яклары да, почмаклары да.

М и с а л. Ике бирелгән ягы һәм алар арасындагы почмагы буенча өчпочмак төзергә.

Б и р е л г ә н:





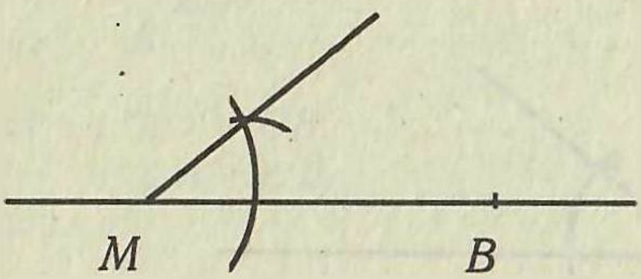
(Сез инде бирелгән кисемтәгә тигез кисемтә һәм бирелгән почмакка тигез почмак төзи беләсез. Шуңа күрә, бу мәсьәләдә һәм башка мәсьәләләрдә аларны ничек төзүне язып тормыйбыз.

Әгәр төзүгә карата булган мәсьәләдә "Бирелгән кисемтәгә тигез кисемтә төзибез" дигән сүзләр очратсагыз, сез беренче мәсьәләне исегезгә төшерерсез.)

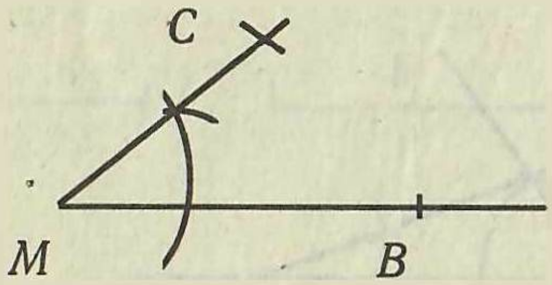
Төзү:

1. *a* кисемтәсенә тигез кисемтә төзибез.

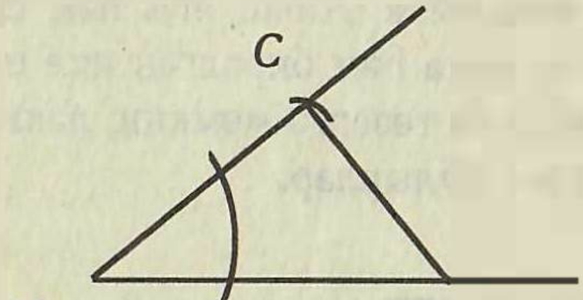
2. *M* ноктасын түбә итеп алып, *A* почмагына тигез почмак төзибез.



3. Почмакның икенче ягында *b* кисемтәсенә тигез кисемтә салабыз.



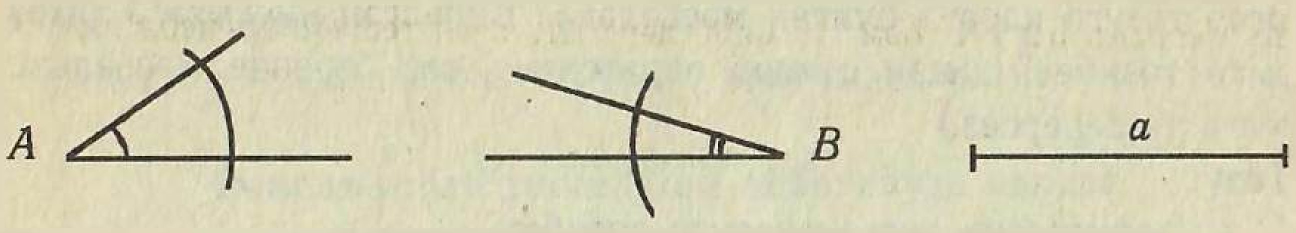
4. *C* ноктасы белән *B* ноктасын тоташтырабыз:



$\triangle MBC$ — эзләнелә торган өчпочмак. Аның ике ягы — бирелгән якларга, алар арасындагы почмагы бирелгән почмакка тигез. Мондый өчпочмакларны бик күп төзергә мөмкин, ләкин алар барысы да беренче билге буенча тигез булырлар.

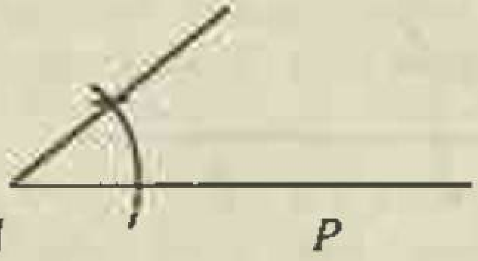
Мисал. Ягы һәм шул як янындагы ике почмагы буенча өчпочмак төзергә.

Бирелгән:

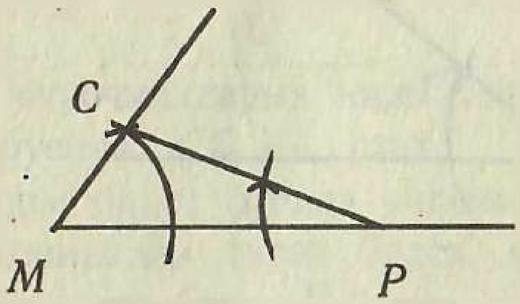


1. *a* кисемтәсенә тигез кисемтә төзибез:

2. Түбәсе *M* ноктасында һәм *A* почмагына тигез булган почмак төзибез:



3. Түбәсе *P* ноктасында һәм *B* почмагына тигез булган почмак төзибез:



Төзелгән почмакларның яклары *C* ноктасында кисешәләр.

$\triangle MPC$ — безгә кирәк өчпочмак. Аның ягы һәм шул як янында ятучы ике почмагы бирелгән якка һәм бирелгән ике почмакка тигез. Мондый өчпочмакларны бик күп төзергә мөмкин, ләкин алар барысы да икенче билге буенча тигез булырлар.

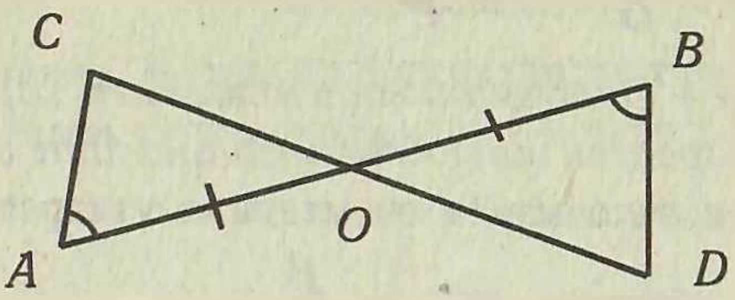
6 НЧЫ ЗАЧЕТ

1. Нинди фигура өчпочмак дип атала?
2. Өчпочмакның элементлары ничек дип атала?
3. Нинди өчпочмак тигезьянлы дип атала?
4. Тигезьянлы өчпочмакның якларын ничек дип атыйлар?
5. Нинди өчпочмак тигезьяклы дип атала?

6. Нинди өчпочмак турыпочмаклы дип атала?
7. Нинди өчпочмак кысынкыпочмаклы дип атала?
8. Нинди өчпочмак җәенкепочмаклы дип атала?
9. Теорема 6.1 ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга).
10. Теорема 6.2 ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга).

6 нчы контроль эш

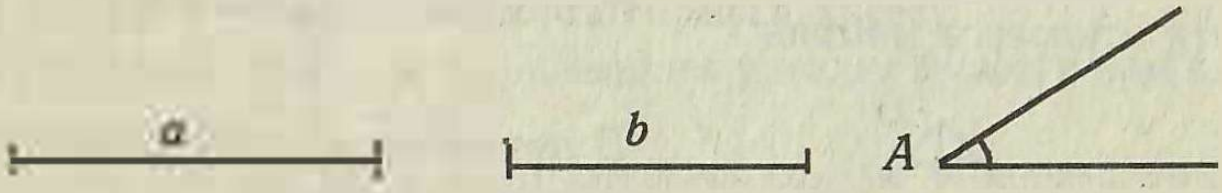
1. Тигезьянлы өчпочмакның ян ягы 10 см, ә периметры 32 см. Нигезе күпме?



2. Б и р е л г ә н: $AO = OB$,
$\angle A = \angle B$.

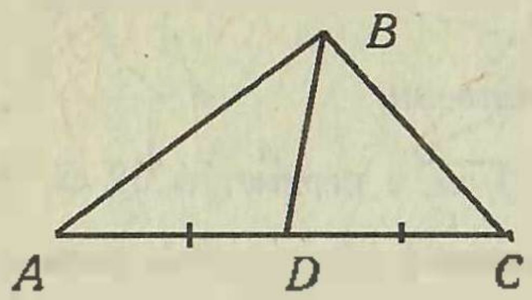
И с б а т л а р г а:
$AC = BD$.

3. Ике ягы һәм алар арасындагы почмагы буенча өчпочмак төзергә.



§ 7. ТИГЕЗЬЯНЛЫ ӨЧПОЧМАК

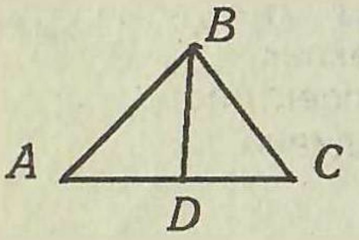
Теләсә нинди өчпочмакның теләсә кайсы түбәсеннән каршы ятучы якның уртасына кисемтә үткәрергә мөмкин.



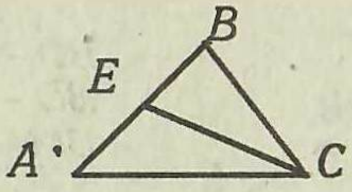
AC ягын урталай бүлик.
BD кисемтәсен үткәрик.

Б и л г е л ә м ә. *Өчпочмакның түбәсеннән каршы ятучы якның уртасына үткәрелгән кисемтә медиана дип атала.*

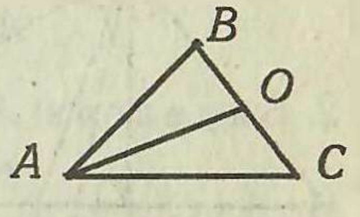
Теләсә нинди өчпочмакта өч медиана үткәрергә мөмкин:



BD медианасы

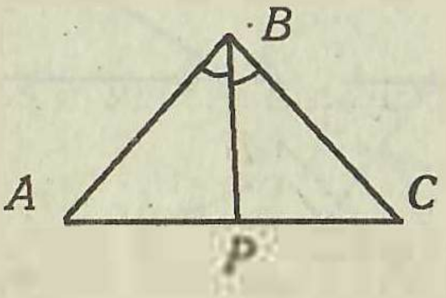


CE медианасы



AO медианасы

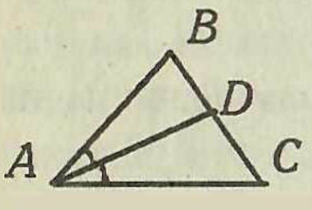
Теләсә нинди өчпочмакның түбәсеннән почмакны урталай бүлүче кисемтә үткәрергә мөмкин.



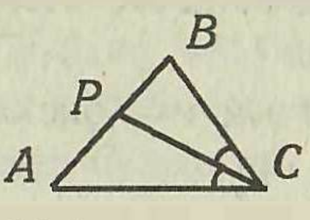
B почмагын урталай бүлеп, *BP* кисемтәсе үткәрәбез.

Б и л г е л ә м ә. *Өчпочмакның түбәсеннән үтүче һәм почмакны урталай бүлүче кисемтә биссектриса дип атала.*

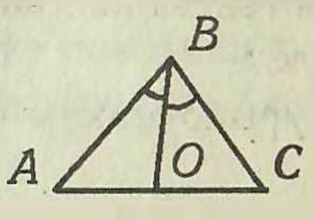
Теләсә нинди өчпочмакның өч биссектрисасын үткәрергә мөмкин.



AD биссектрисасы

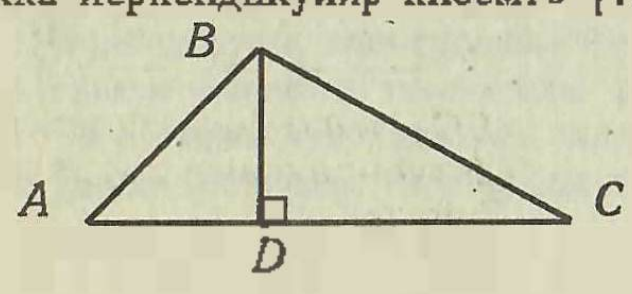


CP биссектрисасы



BO биссектрисасы

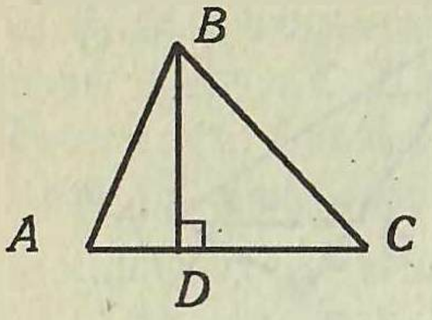
Теләсә нинди өчпочмакның теләсә кайсы түбәсеннән каршы ятучы якка перпендикуляр кисемтә үткәрергә мөмкин.



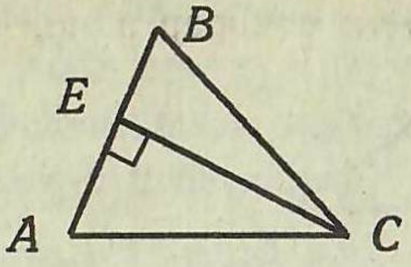
BDC почмагы туры

Б и л г е л ә м ә. *Өчпочмак түбәсеннән каршы ятучы якка туры почмак ясап үткәрелгән кисемтә биеклек дип атала.*

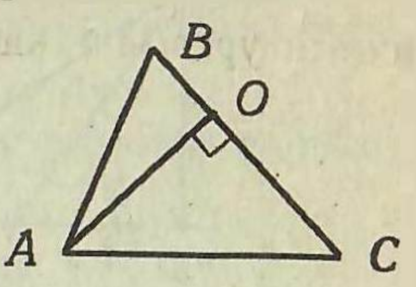
Теләсә нинди өчпочмакта өч биеклек үткәрергә мөмкин.



BD биеклеге

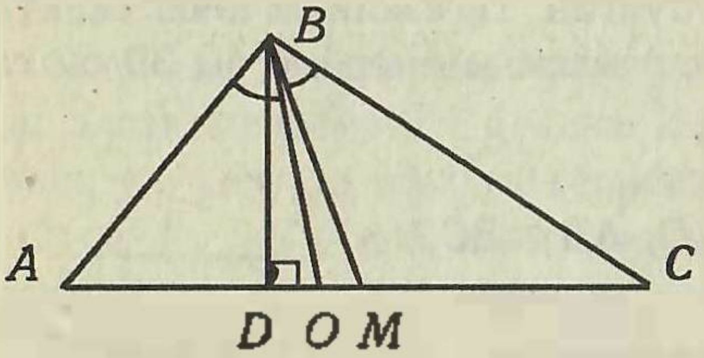


CE биеклеге



AO биеклеге

Ирекле өчпочмакта медиана, биссектриса, биеклек үзара һәм өчпочмак яклары белән тәңгәл килмиләр — алар төрле кисемтәләр.

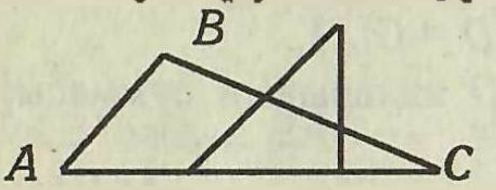


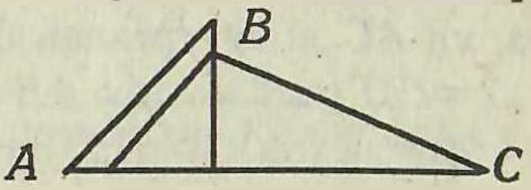
BD — биеклек
BO — биссектриса,
BM — медиана.

Медиана үткәрү өчен, якны урталай бүләргә һәм кисемтә уртасы белән каршы ятучы түбәне тоташтырырга кирәк.

Биссектриса үткәрү өчен, почмакны урталай бүләргә һәм кисемтә үткәрергә кирәк.

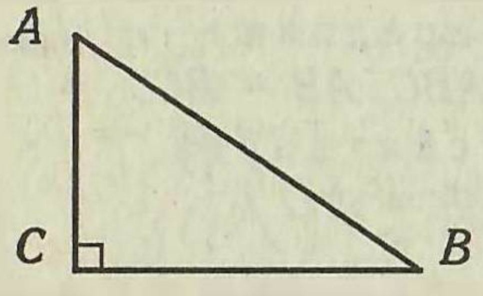
Биеклек үткәрү өчен, туры почмагы булган өчпочмак кирәк.



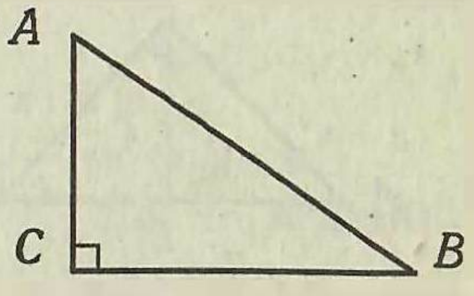


Туры почмакның бер ягы *AC* ягы белән тәңгәл килерлек итеп, *AC* ягына өчпочмакны куябыз. Туры почмакның икенче ягы *B* түбәсе белән тәңгәл килгәнче, өчпочмакны *AC* ягы буенча шудырабыз. *BO* — биеклек.

Турыпочмаклы өчпочмакның ике биеклеге яклары белән тәңгәл килә.

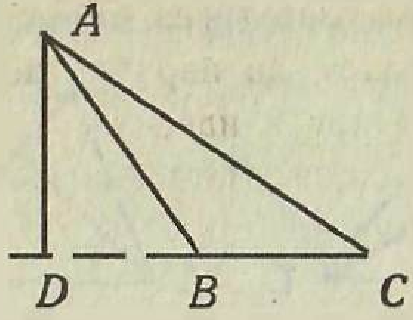


AC — өчпочмакның ягы һәм *A* түбәсеннән төшерелгән биеклеге

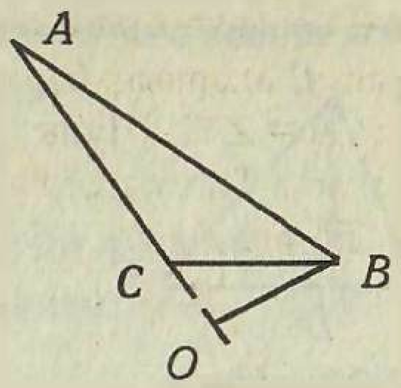


BC — өчпочмакның ягы һәм *B* түбәсеннән төшерелгән биеклеге

Җәенке почмаклы өчпочмакның кысынкы почмакларыннан төшерелгән биеклекләре өчпочмакның тышына чыгалар.

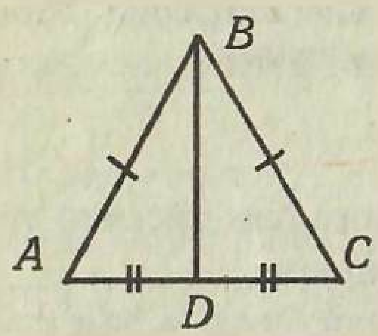


AD — *A* түбәсеннән төшерелгән биеклек



BO — *B* түбәсеннән төшерелгән биеклек

Мисал. Периметры 40 см булган тигезьянлы өчпочмакта $AB = AC$. BD — медиана. ABD өчпочмагының периметры 30 см га тигез. BD ны табарга.



Бирелгән:
$\triangle ABC$, $AB = BC$,
BD — медиана,
$P_{\triangle ABC} = 40$ см,
$P_{\triangle ABD} = 30$ см.
Табарга:
BD ны.

Чишү. (Өчпочмакның барлык якларының суммасы периметр дип атала. $\triangle ABC$ — тигезьянлы, шуңа күрә, $AB = BC$; BD — медиана, ул AC ягын урталай бүлә, $AD = CD$.)

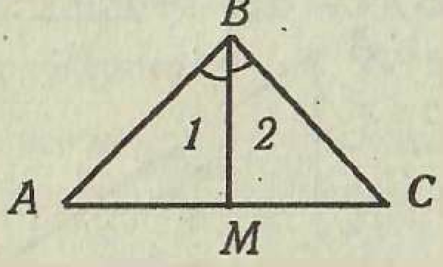
$40 : 2 = 20$ (см) — (бу AB һәм AD якларының суммасы),

$30 - 20 = 10$ (см) — (BD ягы).

Җавап: 10 см.

Тигезьянлы өчпочмак кайбер үзлекләргә ия. Аларны хәзер исбатлыйк.

Теорема 7.1. ***Тигезьянлы өчпочмакның нигез янындагы почмаклары тигез***. („4" һәм „5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга.)



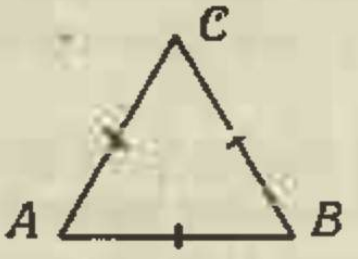
Бирелгән:
$\triangle ABC$, $AB = BC$,
Исбатларга:
$\angle A = \angle C$.

Исбатлау. BM биссектрисасын уздырабыз. Ул B почмагын урталай бүлә. $\triangle ABM$ һәм $\triangle CBM$ барлыкка килә. Бу ике өчпочмакны карыйбыз. Аларда:

$AB = BC$ — чөнки өчпочмак тигезьянлы, $\angle 1 = \angle 2$ — чөнки биссектриса үткәрдек, BM — уртак як.

Димәк, беренче билге буенча өчпочмаклар тигез. Ә өчпочмаклар тигез булгач, аларның барлык элементлары да пар-пар тигез була. Моннан $\angle A = \angle C$. Шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

Нәтиҗә. Тигезьяклы өчпочмакның барлык почмаклары да тигез. ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен исбатларга.)

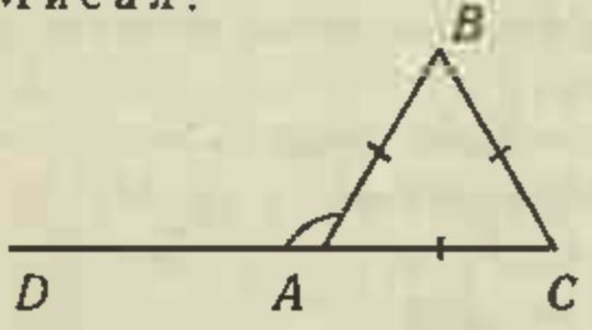


Бирелгән:
$\triangle ABC$, $AB = BC = AC$.
Исбатларга:
$\angle A = \angle B = \angle C$.

Исбатлау.

Өчпочмак тигезьяклы булгач, ул тигезьянлы була. AC ягын нигез дип алсак, теорема 7.1 буенча $\angle A = \angle C$. Әгәр BC ны нигез итеп алсак, ул вакытта шул ук теорема буенча $\angle C = \angle B$ була. Моннан $\angle C = \angle A$, $\angle C = \angle B$ икәне килеп чыга, ягъни барлык почмаклары да тигез.

Мисал.



Бирелгән:
$\triangle ABC$ — тигезьянлы,
$AB = BC$, $\angle DAB = 130°$.
Табарга:
$\angle C$ ын.

Чишү.

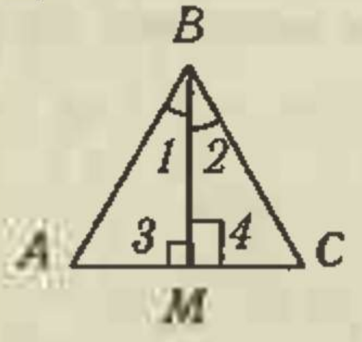
($\angle DAB$ һәм $\angle BAC$ — чиктәш почмаклар. Аларның суммасы 180° ка тигез.)

$180° - 130° = 50°$ — (бу $\angle BAC$),

$\angle C = \angle BAC$ (теорема 7.1 буенча).

Җавап: 50°.

Теорема 7.2. ***Тигезьянлы өчпочмакның түбәсеннән үткәрелгән медианасы бер үк вакытта биссектриса да, биеклек тә була.*** ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга.)



Бирелгән:
$\triangle ABC$ — тигезьянлы,
$AB = BC$, BM — медиана.
Исбатларга:
BM — биссектриса,
BM — биеклек.

Исбатлау.

ABM һәм *BCM* өчпочмакларын карыйк. Аларда:

AB = BC, чөнки *ABC* өчпочмагы тигезьянлы,

AM = CM, чөнки *BM* — медиана, ул *AC* ягын урталай бүлә, $\angle A = \angle C$ — теорема 7.1 буенча тигезьянлы өчпочмакның нигез янындагы почмаклары тигез.

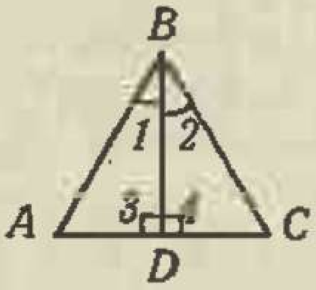
Димәк, беренче билге буенча өчпочмаклар тигез. Ә өчпочмаклар тигезлегеннән аның барлык элементларының да пар-пар тигез икәнлеге килеп чыга.

$\angle 1 = \angle 2$, моннан *B* почмагының урталай бүленгәнлеге, ягъни *BM* ның биссектриса булуы килеп чыга, $\angle 3 = \angle 4$, моннан һәр чиктәш почмакның 90° ка тигезлеге, ягъни *BM* ның биеклек икәнлеге килеп чыга.

Шуны исбат итәргә кирәк иде дә. Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә үткәрелгән медианасы биеклек һәм биссектриса белән тәңгәл килә. Бу тигезьяклы өчпочмакта да шулай, әлбәттә.

Кире теорема төзибез.

Теорема 7.3. ***Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә үткәрелгән биссектрисасы бер үк вакытта медиана да, биеклек тә була.*** ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга.)



Бирелгән:
$\triangle ABC$ — тигезьянлы,
BD — биссектриса.
Исбатларга:
BD — медиана,
BD — биеклек.

Исбатлау:

ABD һәм *BCD* өчпочмакларын карыйбыз. Аларда:

$\angle 1 = \angle 2$, чөнки *BD* — биссектриса,

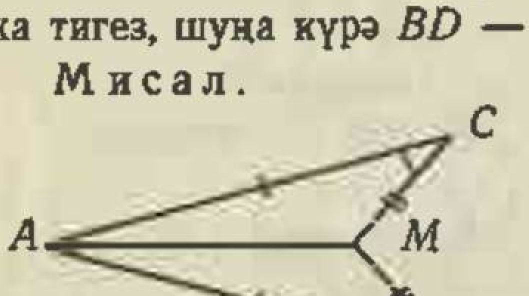
$\angle A = \angle C$, чөнки тигезьянлы өчпочмакның нигез янындагы почмаклары тигез, *AB = BC*, чөнки $\triangle ABC$ — тигезьянлы.

Нәтиҗә: икенче билге буенча өчпочмаклар тигез. Тигез өчпочмакларның пар-пар элементлары тигез, шул исәптән:

AD = CD, моннан *BD* — медиана,

$\angle 3 = \angle 4$, ләкин алар чиктәш почмаклар, аларның һәрберсе 90° ка тигез, шуңа күрә *BD* — биеклек. Шуны исбатларга кирәк иде.

Мисал.



Бирелгән:
AD = AC, *CM = DM*,
$\angle C = \angle D$.
Исбатларга:
AM— биссектриса.

Исбатлау.

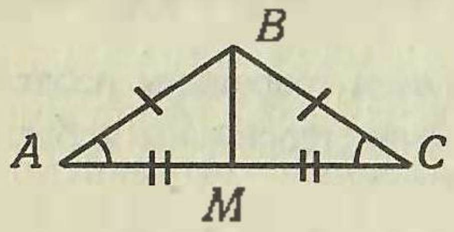
ACM һәм ADM өчпочмакларын карыйбыз. Аларда:

$AC = AD$, $CM = DM$, $\angle C = \angle D$ — шарт буенча.

Нәтиҗә: өчпочмаклар беренче билге буенча тигез. Бу өчпочмакларның тигезлегеннән $\angle CAM = \angle DAM$ икәнлеге килеп чыга.

$\angle CAM = \angle DAM$ булгач, AM — биссектриса була.

Мисал.



Бирелгән:
$AB = BC$, $AM = CM$,
$\angle A = \angle C$.
Исбатларга:
BM — биеклек.

Исбатлау:

ABM һәм BCM өчпочмакларын карыйбыз. Аларда: $AB = BC$, $AM = CM$, $\angle A = \angle C$ — шарт буенча.

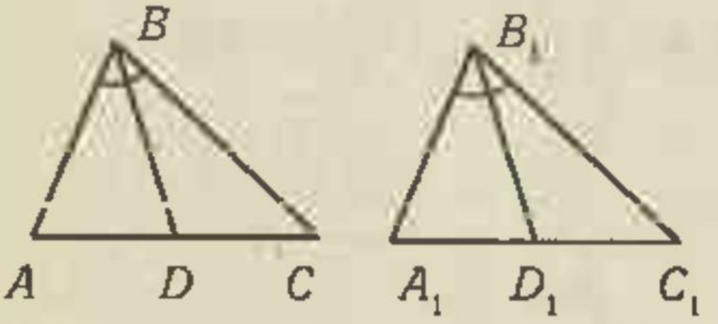
Нәтиҗә: Өчпочмаклар беренче билге буенча тигез. Тигез өчпочмакларда барлык элементлар да пар-пар тигез булганлыктан, $\angle AMB = \angle BMC$, ләкин алар чиктәш, моннан аларның һәрберсе $90°$ ка тигез, ягъни BM — биеклек.

Кисемтәнең биссектриса булуын исбатлау өчен, почмакларның тигезлеген исбатларга кирәк.

Кисемтәнең медиана икәнен исбатлау өчен, кисемтәләрнең тигезлеген исбатларга кирәк.

Кисемтәнең биеклек икәнен исбатлау өчен, туры почмак барлыгын исбатларга кирәк.

Мисал. Тигез өчпочмакларның тигез почмакларыннан үткәрелгән медианаларының тигезлеген исбатларга.



Бирелгән:
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$,
$\angle B = \angle B_1$,
BD һәм B_1D_1 — медианалар.
Исбатларга:
$BD = B_1D_1$.

Исбатлау.

ABD һәм $A_1B_1D_1$ өчпочмакларын карыйбыз. Аларда:

$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, чөнки өчпочмаклар тигез.

$AD = A_1D_1$ — тигез якларның артылары.

Нәтиҗә: өчпочмаклар беренче билге буенча тигез. Өчпочмаклар тигезлегеннән, $BD = B_1D_1$.

7 НЧЕ ЗАЧЕТ

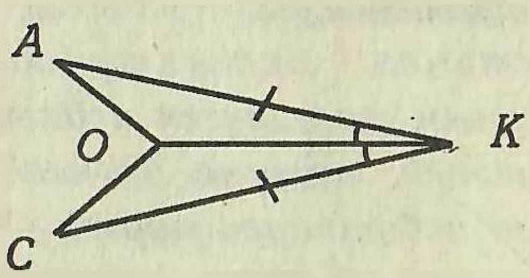
1. Нәрсә ул медиана?
2. Медиананы ничек үткәрергә?
3. Нәрсә ул биссектриса?
4. Биссектрисаны ничек үткәрергә?
5. Нәрсә ул биеклек?
6. Биеклекне ничек үткәрергә?
7. Теорема 7.1 ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы һәм аннан чыккан нәтиҗәне исбатларга).
8. Теорема 7.2 ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга).
9. Теорема 7.3 ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга).

7 нче контроль эш

1. Иркле өчпочмак сызыгыз һәм аның бер үк түбәсеннән медиана, биссектриса, биеклек үткәрегез.

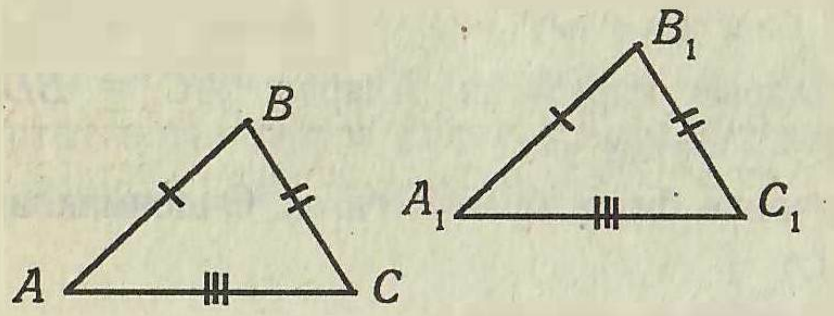
2. Периметры 30 см га тигез булган тигезьянлы *ABC* өчпочмагында озынлыгы 6 см га тигез булган *BD* медианасы үткәрелгән. *ABD* өчпочмагының периметрын табыгыз.

3. Б и р е л г ә н:
$AK = CK$,
OK — биссектриса.
И с б а т л а р г а:
$\angle A = \angle C$.



§8. ӨЧПОЧМАКЛАР ТИГЕЗЛЕГЕНЕҢ ӨЧЕНЧЕ БИЛГЕСЕ

Т е о р е м а 8.1. ***Әгәр бер өчпочмакның өч ягы икенче өчпочмакның өч ягына тиңдәшле рәвештә тигез булса, андый өчпочмаклар тигез була.***



Б и р е л г ә н:

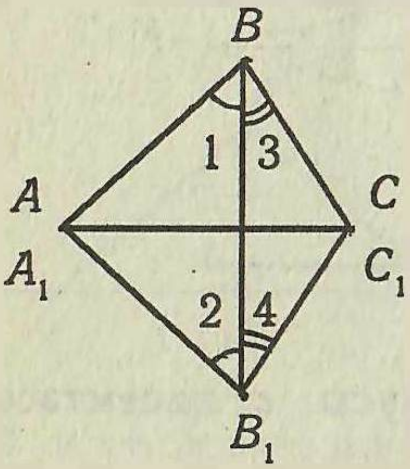
$\triangle ABC$ һәм $\triangle A_1B_1C_1$,
$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$,
$AC = A_1C_1$.

И с б а т л а р г а:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

И с б а т л а у:

$A_1B_1C_1$ өчпочмагын кисеп алабыз дип күз алдына китереп, тигез булган AC һәм A_1C_1 яклары туры килерлек һәм B һәм B_1 түбәләре AC ягыннан төрле якта булырлык итеп, ABC өчпочмагы янына теркәп куябыз дип уйлыйбыз. AC һәм A_1C_1 яклары тәңгәл килерләр, чөнки алар шарт буенча тигез.



B һәм B_1 нокталарын тоташтырабыз һәм почмакларны билгелибез. ABB_1 өчпочмагы килеп чыга. Ул тигезьянлы, чөнки шарт буенча $AB = AB_1$. Ә тигезьянлы өчпочмакның нигез янындагы почмаклары тигез булганлыктан, $\angle 1 = \angle 2$. $\triangle CBB_1$ — тигезьянлы, чөнки шарт буенча $CB = CB_1$ һәм $\angle 3 = \angle 4$.

Килеп чыккан тигезлекләрне кушабыз:

$$+\begin{array}{l}\angle 1 = \angle 2 \\ \angle 3 = \angle 4\end{array}$$

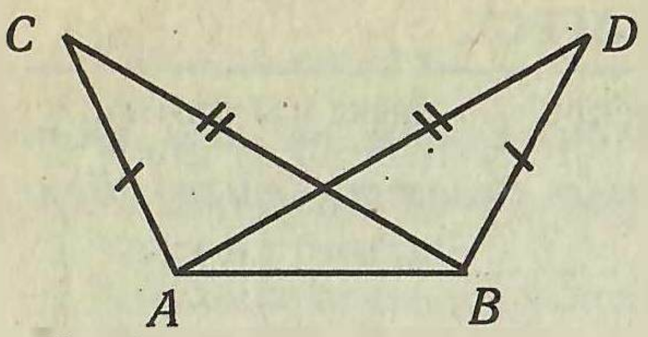
$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$, ләкин $\angle 1 + \angle 3 = \angle B$, ә $\angle 2 + \angle 4 = \angle B_1$.
1 нче билге буенча $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

М и с а л. Беренче өчпочмакның яклары 10 см, 12 см, 15 см, ә икенчесенеке 15 см, 12 см, 8 см, өченче өчпочмакның яклары 12 см, 15 см, 10 см. Кайсы өчпочмаклар тигез?

Җ а в а п: беренче һәм өченче өчпочмаклар тигез, чөнки аларның яклары пар-пар тигез.

Мисал.



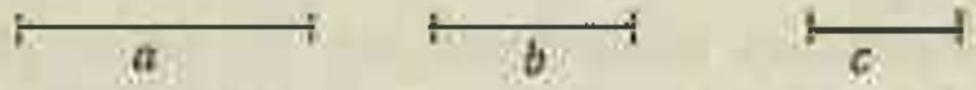
Бирелгән:
$AC = BD$,
$AD = BC$.
Исбатларга:
$\angle C = \angle D$.

Исбатлау:

ABC һәм ABD өчпочмакларын карыйбыз. Аларда: $AC = BD$, $AD = BC$ — шарт буенча, AB — уртак як.

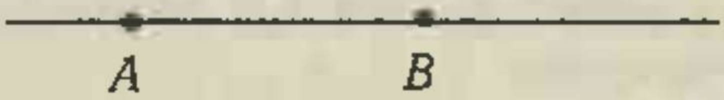
Нәтиҗә: өчпочмаклар өченче билге буенча тигез. Өчпочмаклар тигез булгач, $\angle C = \angle D$ була.

Мисал. Өч ягы буенча өчпочмак төзергә.

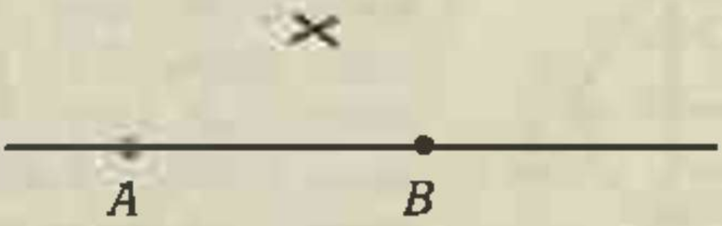


Төзү.

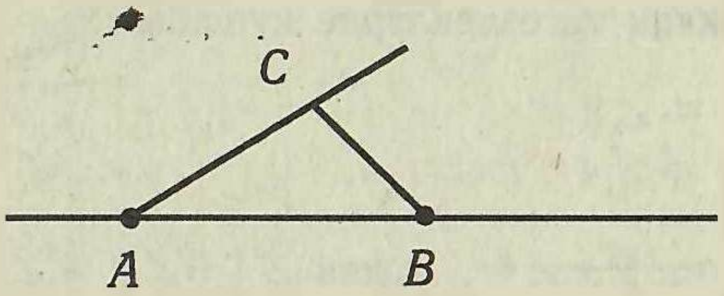
1. a кисемтәсенә тигез булган AB кисемтәсен төзибез:



2. A ноктасын үзәк итеп алып, b кисемтәсенең озынлыгына тигез булган радиус белән дуга сызабыз:



3. B ноктасын үзәк итеп алып, радиусы c кисемтәсенең озынлыгына тигез булган дуга сызабыз:



4. Дугаларның кисешү ноктасын C дип билгелибез һәм аны A, B нокталары белән тоташтырабыз.

ABC — эзләнелә торган өчпочмак. Аның яклары бирелгән кисемтәләргә тигез.

Без төзүгә карата ике төп мәсьәләне карап үткән идек инде:

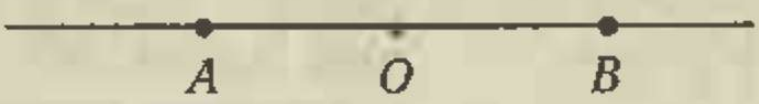
1. Бирелгән кисемтәгә тигез кисемтә төзү.

2. Бирелгән почмакка тигез почмак төзү.

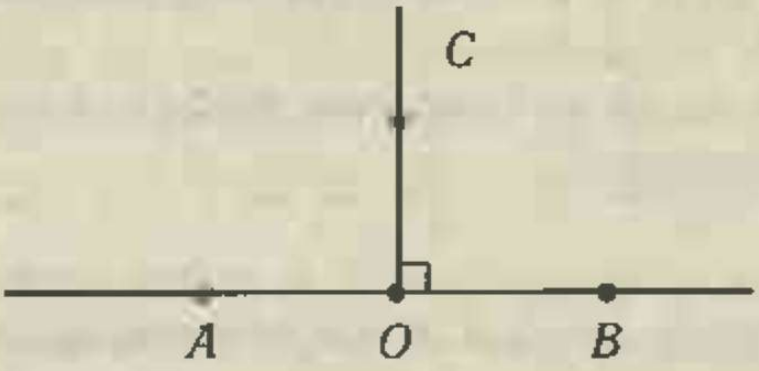
3 нче мәсьәлә. Турыга аның бер ноктасыннан перпендикуляр туры үткәрергә.

Төзү:

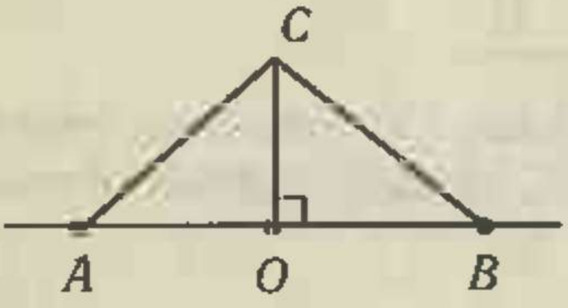
1. O ноктасыннан ике якка да ирекле озынлыктагы тигез кисемтәләр салабыз:



2. A һәм B нокталарын үзәк итеп алып, AB кисемтәсенең яртысыннан зуррак радиус белән дугалар сызабыз. Дугалар кисешкән ноктаны C дип тамгалыйбыз.



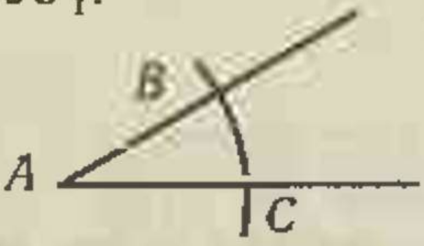
3. C ноктасын O ноктасы белән тоташтырабыз. $CO \perp AB$. Моны исбатлыйк. C ноктасын A һәм B нокталары белән тоташтырабыз. — $\triangle ABC$ — тигезьянлы.



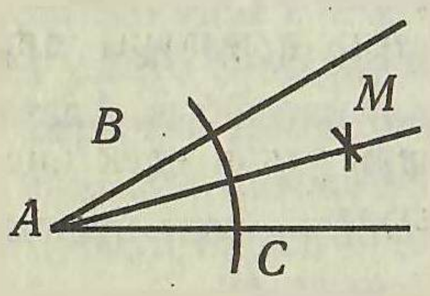
$AC = BC$, чөнки дугаларны бер үк радиус белән сыздык. $AO = BO$ — тигез кисемтәләрне үзебез төзедек. Димәк, CO — тигезьянлы өчпочмакның медианасы, теорема 7.1 буенча медиана биеклек тә була: $CO \perp AB$.

4 нче мәсьәлә. Бирелгән почмакны урталай бүләргә (биссектриса үткәрергә).

Төзү:

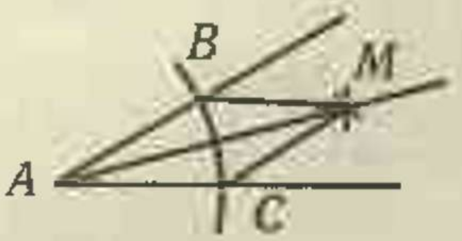


1. Бирелгән почмакның якларында, A түбәсеннән башлап, ирекле озынлыктагы тигез кисемтәләр салабыз. B һәм C нокталарын таптык.



2. B һәм C нокталарын үзәк итеп алып, бер үк радиус белән дугалар сызабыз. Алар M ноктасында кисешәләр.

3. M ноктасын A түбәсе белән тоташтырабыз. AM — биссектриса.



Моны исбатлыйк. M ноктасын B һәм C нокталары белән тоташтырабыз. ABM һәм ACM өчпочмакларын карыйбыз. Аларда:

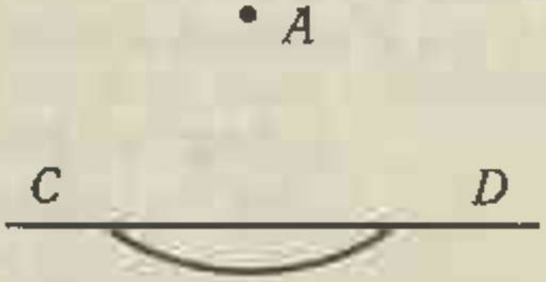
$AB = AC$ — үзебез тигез кисемтәләр төзедек, $BM = CM$ — бер үк радиус белән дугалар сыздык, AM — уртак як.

Нәтиҗә: өчпочмаклар өченче билге буенча тигез. Аларның тигезлегеннән, $\angle BAM = \angle CAM$, ягъни AM — биссектриса икәнлеге килеп чыга.

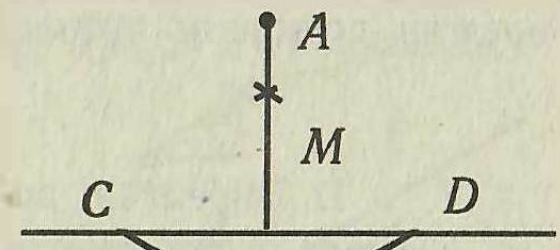
5 нче мәсьәлә. Бирелгән турыга бирелгән ноктадан перпендикуляр төшерергә.

Төзү.

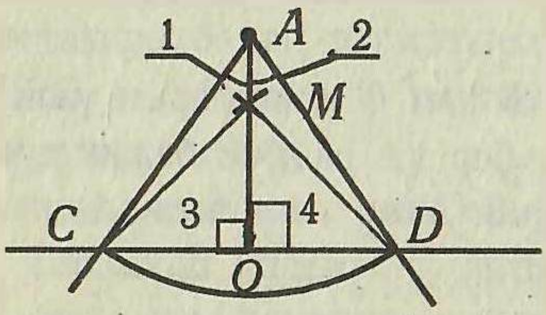
1. A ноктасын үзәк итеп алып, бирелгән турыны ике ноктада кисәрлек итеп, дуга сызабыз. Кисешү нокталарын C һәм D дип билгелибез.



2. C һәм D нокталарын үзәк итеп алып, CD кисемтәсе озынлыгының яртысыннан зуррак радиус белән дугалар сызабыз. Дугалар кисешкән ноктаны M дип тамгалыйбыз.



3. A һәм M нокталары аша туры уздырабыз. $AM \perp CD$.



Моны исбатлыйк. C һәм D нокталарын A һәм M нокталары белән тоташтырабыз. ACM һәм ADM өчпочмакларын карыйбыз. Аларда:

$AC = AD$,

$CM = DM$ — төзү буенча,

AM — уртак як.

Н э т и ж ә: өченче билге буенча өчпочмаклар тигез.

Моннан, $\angle 1 = \angle 2$.

$\triangle CAD$ ын карыйбыз. Ул тигезьянлы, аның $AC = AD$ — төзү буенча. $\angle 1 = \angle 2$, югарыда исбатлау буенча.

CAO һәм DAO өчпочмакларын карыйбыз. Аларда:

$\angle 1 = \angle 2$ — югарыда исбатлау буенча,

$AC = AD$ — $\triangle ACD$ тигезьянлы,

AO — уртак як.

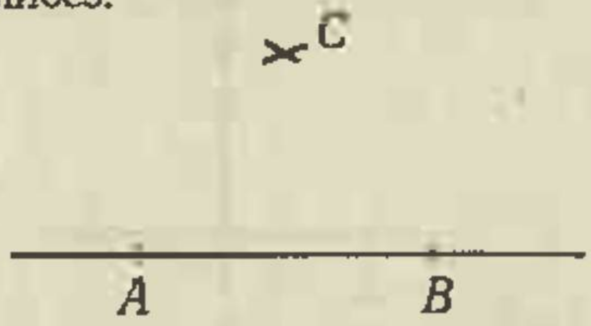
Н э т и ж ә: беренче билге буенча өчпочмаклар тигез. Моннан, $\angle 3 = \angle 4$, ләкин алар чиктәш почмаклар, димәк, әлеге почмаклар 90 шар градуслы, ягъни $AM \perp CD$.

Бу исбатлаудан AO ның CAD өчпочмагының медианасы булуы килеп чыга. Бу алдагы мәсьәләне чишкәндә кирәк булачак.

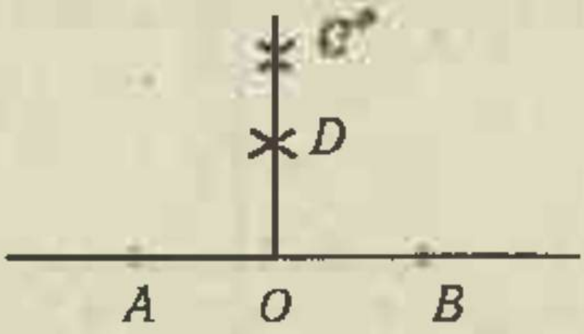
6 н ч ы м ә с ь ә л ә. Бирелгән кисемтәне урталай бүләргә.

Т ө з ү:

1. A һәм B нокталарын үзәк итеп алып, радиусы AB озынлыгының яртысыннан зуррак булган дугалар сызабыз. Дугалар кисешкән ноктаны C дип билгелибез.



2. Шул ук нокталарны үзәк итеп алып, озынлыгының яртысыннан зуррак, ләкин башка радиус белән дугалар сызабыз. D ноктасы килеп чыга.



3. C һәм D нокталары аша туры уздырабыз. O ноктасы килеп чыга.

O — AB ның уртасы.

Исбатланышы 5 нче мәсьәләгә охшаган.

Без төзүгә 6 мәсьәлә карадык.

1. Бирелгән кисемтәгә тигез кисемтә төзү.
2. Бирелгән почмакка тигез почмак төзү.
3. Турыга бирелгән ноктасы аша перпендикуляр үткәрү.
4. Бирелгән почмакны урталай бүлү.

5. Бирелгән ноктадан бирелгән турыга пенпендикуляр төшерү.

6. Бирелгән кисемтәне урталай бүлү. Киләчәктә без бу 6 мәсьәләне төзүгә карата катлаулырак мәсьәләләрне чишкәндә кулланачакбыз. Алга таба әлеге мәсьәләләрне җентекләп язмаячакбыз.

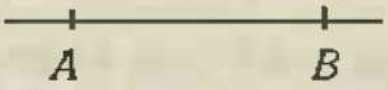
М и с а л. Нигезе һәм шул нигезгә төшерелгән медианасы буенча тигезьянлы өчпочмак төзергә.

Б и р е л г ә н:

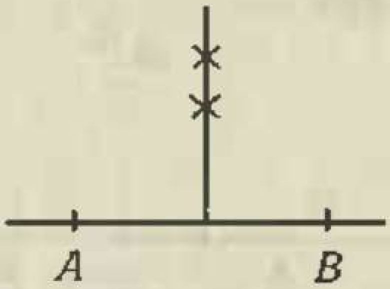
Т ө з ү:

Тигезьянлы өчпочмакта нигезгә үткәрелгән медиана биеклек тә булып тора. Димәк, перпендикуляр төзергә кирәк.

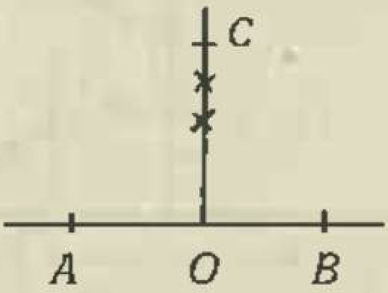
1. *a* кисемтәсенә тигез кисемтә төзибез.



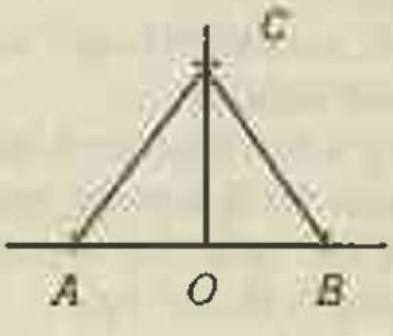
2. Аны урталай бүләбез.



3. Перпендикулярда медианасына тигез булган кисемтә төзибез. *C* ноктасы килеп чыга.



4. *A* һәм *B* нокталарын *C* ноктасы белән тоташтырабыз. *ABC* өчпочмагын табабыз.



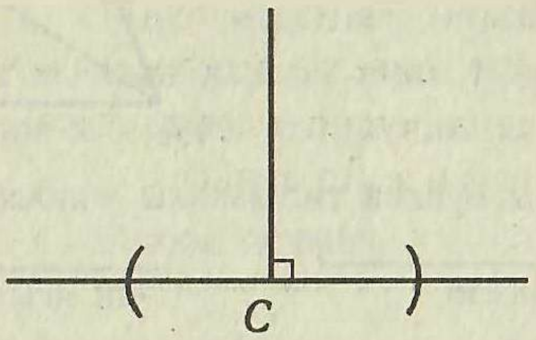
Мисал. Туры почмак ясаучы ике ягы буенча турыпочмаклы өчпочмак төзергә.

Бирелгән:

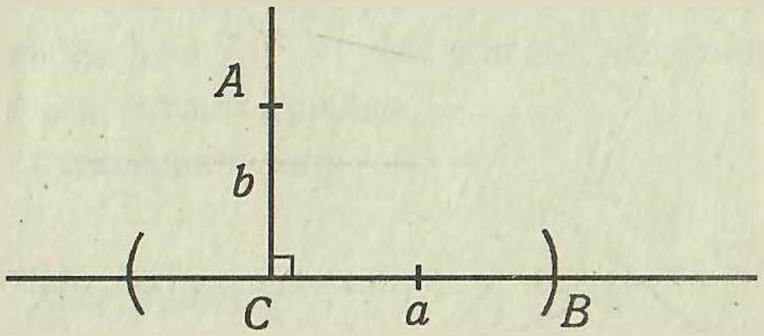
Төзү:

Өчпочмак турыпочмаклы булганлыктан, перпендикуляр төзергә кирәк.

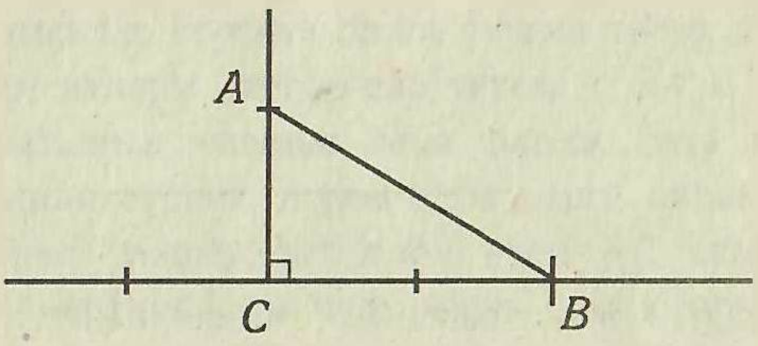
1. Турының теләсә кайсы ноктасында бу турыга перпендикуляр төзибез.



2. Туры почмакның бер ягында — a кисемтәсенә, икенче ягында b кисемтәсенә тигез булган кисемтәләр салабыз.



3. B һәм A нокталарын тоташтырабыз. ABC өчпочмагы килеп чыкты.



8 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Теорема 8.1 ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга).
2. Бирелгән кисемтәне ничек урталай бүләргә?
3. Бирелгән почмакны ничек урталай бүләргә?
4. Турының бирелгән ноктасыннан бу турыга перпендикулярны ничек төзергә?

5. Бирелгән ноктадан бирелгән турыга перпендикулярны ничек төшерергә?

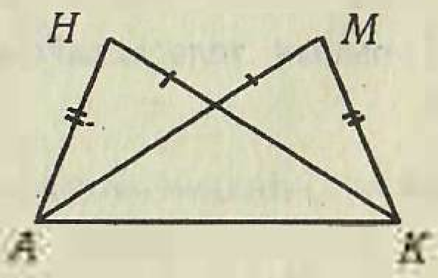
6. "4" һәм "5" билгеләре алу өчен 3 нче һәм 4 нче мәсьәләләрдә төзүнең дөреслеген исбатларга.

7. "5" билгесе алу өчен 5 нче һәм 6 нчы мәсьәләләрдә төзүнең дөреслеген исбатларга.

8 нче контроль эш

1.

Бирелгән:
$AM = HK$,
$AH = MK$
Исбатларга:
$\angle H = \angle M$.

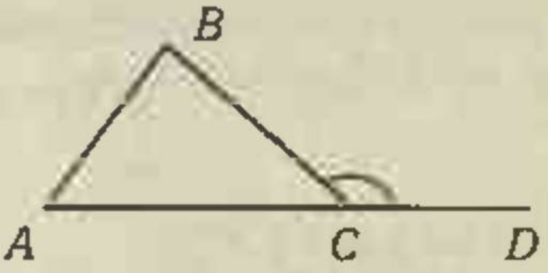


2. Нигезе һәм ян ягы буенча тигезьянлы өчпочмак төзергә.

§ 9. ТУРЫЛАРНЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬЛЕК БИЛГЕЛӘРЕ

Билгеләмә: *Өчпочмакның бирелгән түбәсе янындагы почмагы белән чиктәш почмак өчпочмакның бу түбәсе янындагы тышкы почмагы дип атала.*

BCD – тышкы почмак



Теорема 9.1. ***Өчпочмакның тышкы почмагы үзенә чиктәш булмаган теләсә кайсы эчке почмактан зуррак була*** ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга).

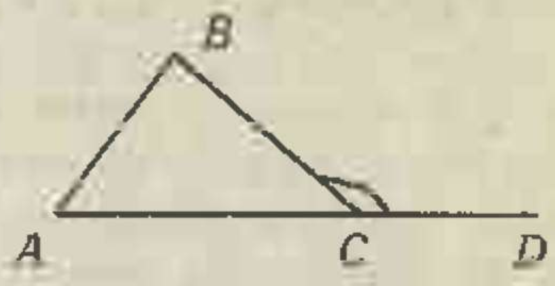
Бирелгән:

$\triangle ABC$, $\angle BCD$ — тышкы почмак.

Исбатларга:

BCD почмагы $\angle B$ нан зуррак,

BCD почмагы $\angle A$ нан зуррак.



Исбатлау:

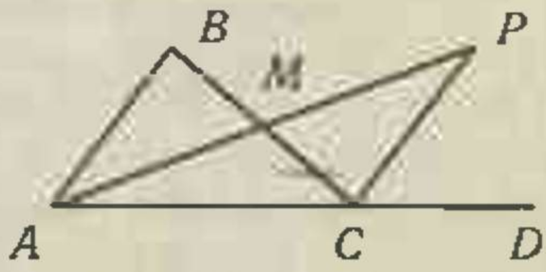
BC ягын тигез ике кисәккә бүләбез һәм *AM* медианасын уздырабыз. Аны дәвам итәбез һәм $MP = AM$ кисемтәсен төзибез.

P һәм *C* нокталарын тоташтырабыз.

ABM һәм *CPM* өчпочмакларын карыйбыз. Аларда:

$\left.\begin{array}{l} AM = PM, \\ BM = CM \end{array}\right\}$ — төзү буенча,

$\angle BMA = \angle PMC$ — вертикаль почмаклар.

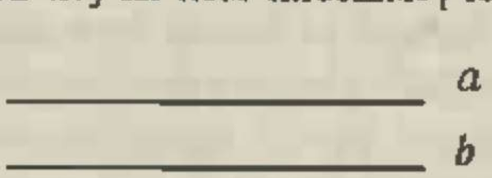


Нәтиҗә: өчпочмаклар беренче билге буенча тигез, шулай булгач, аларның барлык элементлары да пар-пар тигез, $\angle B = \angle BCP$. Ә *BCP* почмагы *BCD* почмагының өлешен генә тәшкил итә, димәк, *BCD* почмагы *B* почмагыннан зуррак, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Теореманың икенче өлешен исбатлау өчен *AC* ягын ике тигез кисәккә бүләргә, *BO* медианасын уздырырга һәм югарыдагыча итеп фикер йөртергә кирәк.

Без бер үк яссылыкта ятучы һәм кисешмәүче турыларны параллель турылар дип атадык.

$a \parallel b$

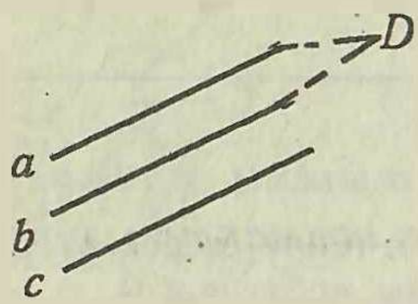


Бу турыларның параллельлеген ничек тикшерергә? Әгәр алар сызымда кисешми икән, бу әле берни дә әйтми — турылар чиксез.

Иң гади ысул, аларны барып, тикшереп карау булыр иде, бу мөмкин түгел. Турыларның параллельлеген тикшерү өчен дүрт билге бар.

Турылар параллельлегенең беренче билгесе

Теорема 92 ***Бер үк турыга параллель булган ике туры үзара да параллель була.***



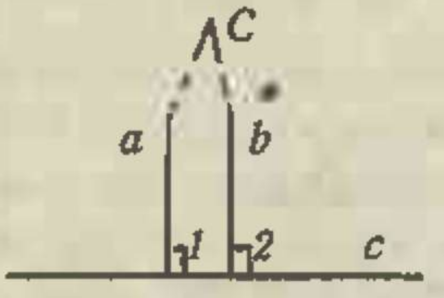
Бирелгән:
$a \parallel c$,
$b \parallel c$.
Исбатларга:
$a \parallel b$.

Исбатлау:

Без a һәм b турыларының параллельлеген белмибез. Алар ниндидер D ноктасында кисешәләр дип уйлыйк. Димәк, D ноктасы аша c турысына параллель булган ике туры уза. А4 аксиомасы буенча моның булуы мөмкин түгел. (Бирелгән турыда ятмаган нокта аша бу турыга параллель итеп бары тик бер генә туры үткәрергә мөмкин.) Безнең фараз дөрес булмаган, турылар кисешми, ягъни алар параллель. Теорема исбатланды.

Турылар параллельлегенең икенче билгесе

Теорема 9.3. ***Бер үк турыга перпендикуляр булган ике туры үзара параллель була*** ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга).



Бирелгән:
$a \perp c$, $b \perp c$.
Исбатларга:
$a \parallel b$.

Исбатлау:

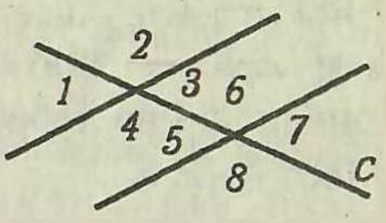
Без a һәм b турыларының параллельлеген белмибез. Алар ниндидер C ноктасында кисешәләр дип уйлыйк. Ул вакытта ABC өчпочмагы барлыкка килә. $\angle 2$ — аның тышкы почмагы шарт буенча $90°$ ка тигез, һәм ул $\angle 1$ гә — үзенә чиктәш булмаган эчке почмагына тигез. Бу 9.1 теоремасы буенча мөмкин түгел. Димәк, безнең уйлавыбыз дөрес түгел, турылар кисешми, ягъни алар параллель. Теорема исбатланды.

Турыларның параллельлеге турында бу ике билге шактый йомшак. Чынлап та, турыларның параллельлеген белер өчен беренче билге буенча аларның өченче турыга параллель икәнлеген белергә кирәк, ә икенче билге буенча — аларның өченче турыга перпендикуляр икәнлеген белү шарт. Турыларның өченче турыга параллель икәнлеген кайдан белергә соң? Турыларның параллельлеге турында көчлерәк булган тагын ике билге бар.

Турылар параллельлегенең өченче билгесе

Турыларны кисеп үтүче өченче туры бу турыларга карата *кисүче* дип атала.

Ике туры өченче туры белән кисешкәндә сигез почмак барлыкка килә.



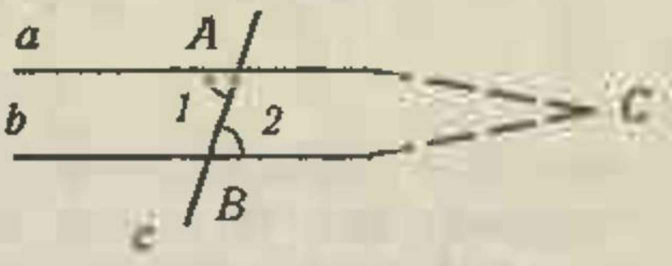
c — кисүче

4 һәм 6 почмаклары *эчке аркылы ятучы* почмаклар дип атала. 3 һәм 5 почмаклары да эчке аркылы ятучы почмаклар.

3 һәм 6 почмаклары *эчке якташ* почмаклар дип атала. 4 һәм 5 почмаклары да эчке якташ почмаклар.

Теорема 9.4. ***Әгәр ике туры өченче туры белән кисешкәндә эчке аркылы ятучы почмаклар тигез булса, турылар параллель булалар.***

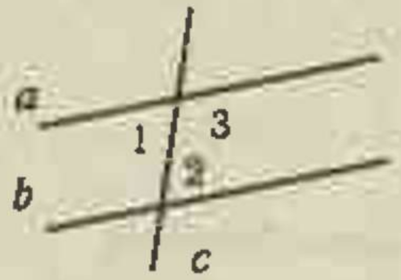
Бирелгән:
c — кисүче,
$\angle 1 = \angle 2$.
Исбатларга:
$a \parallel b$
Исбатлау:



Без a һәм b турыларының параллельлеген белмибез. Алар ниндидер C ноктасында кисешәләр дип уйлыйк. Ул вакытта ABC өчпочмагы барлыкка килә. Аның тышкы почмагы 1, шарт буенча, үзенә чиктәш булмаган 2 эчке почмагына тигез. Бу 9.1 теоремасы буенча мөмкин түгел. Димәк, турылар кисешәләр дип уйлавыбыз дөрес түгел, турылар кисешмиләр, ягъни параллельләр. Теорема исбатланды.

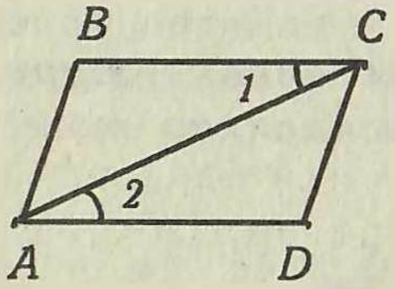
Турылар параллельлегенең дүртенче билгесе

Теорема 9.5. ***Әгәр ике туры өченче туры белән кисешкәндә эчке якташ почмакларның суммасы 180° ка тигез булса, турылар параллель булалар.*** (“4” һәм “5” билгеләре алу өчен теореманы исбатларга).



Бирелгән:
$\angle 2 + \angle 3 = 180°$.
Исбатларга:
$a \parallel b$.

Исбатлау:
Безгә $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ дип бирелгән. Моннан 2 почмагын табабыз:
$\angle 2 = 180° - \angle 3$,
$\angle 1$ һәм $\angle 3$ — чиктәш почмаклар. Аларның суммасы 180° ка тигез. Моннан $\angle 1$ не табабыз:
$\angle 1 = 180° - \angle 3$.
Барлыкка килгән тигезләмәләрнең уң яклары тигез, димәк, сул яклары да тигез.
$\angle 1 = \angle 2$, ләкин алар эчке аркылы ятучы почмаклар. Алар тигез булгач, 9.4 теоремасы буенча турылар параллель. Теорема исбатланды.
Мисал.



Бирелгән:
$AB = CD$,
$BC = AD$,
Исбатларга:
$BC \parallel AD$.

Исбатлау:
(Турыларның параллельлеген исбатлар өчен эчке аркылы ятучы почмакларның тигезлеген яки эчке якташ почмакларның суммасының 180° ка тигез икәнлеген исбатларга кирәк. Ә почмакларның тигезлеген исбатлар өчен өчпочмакларның тигезлеген исбатларга кирәк).
ABC һәм ADC өчпочмакларын карыйбыз. Аларда:
$\left.\begin{array}{l} AB = CD, \\ AD = BC \end{array}\right\}$ — шарт буенча,
AC — уртак як .

Н ә т и җ ә: өчпочмаклар өченче билге буенча тигез. Шулай булгач, аларның барлык элементлары да пар-пар тигез, ∠1 = ∠2, ә алар эчке аркылы ятучы почмаклар, димәк, 9.4 теоремасы буенча *BC* һәм *AD* турылары параллель.

М и с а л.

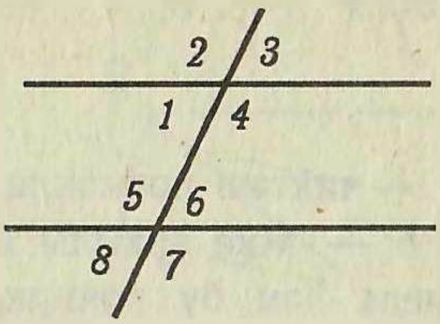
Б и р е л г ә н:

∠2 = 120°.

∠8 = 60°.

И с б а т л а р г а:

a ∥ *b*.



И с б а т л а у:

∠2 һәм ∠4 — вертикаль почмаклар, ∠4 = ∠2 = 120°.

∠8 һәм ∠6 — вертикаль почмаклар, ∠6 = ∠8 = 60°.

∠4 һәм ∠6 — эчке якташ почмаклар: 120° + 60° = 180°.

Эчке якташ почмакларның суммасы 180°, димәк, 9. 5 теоремасы буенча турылар параллель.

9.4 һәм 9.5 теоремаларына кире теоремаларны исбатлыйбыз.

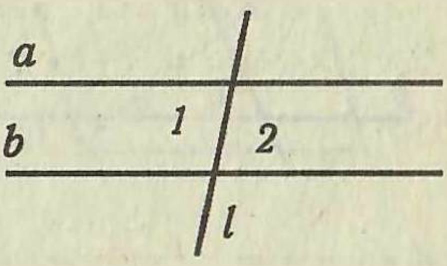
Т е о р е м а 9.6. ***Әгәр турылар параллель булса, эчке аркылы ятучы почмаклар тигез була.***

Б и р е л г ә н:

a ∥ *b*.

И с б а т л а р г а:

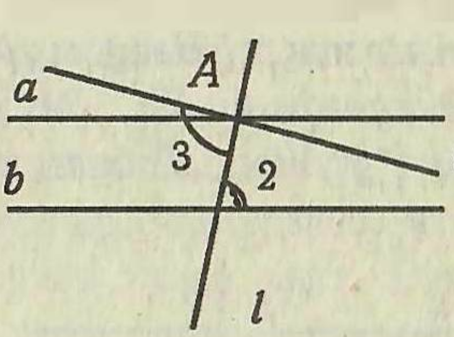
∠1 = ∠2.

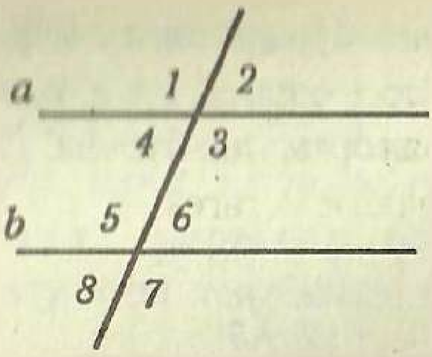


И с б а т л а у:

Без 1 һәм 2 почмакларының тигезлеген белмибез. Алар тигез түгел дип уйлыйк. Ул вакытта үзебез 2 почмагына тигез булган 3 почмагын төзибез һәм *c* турысын үткәрәбез.

a ∥ *b* — шарт буенча, 2 һәм 3 почмаклары төзү буенча тигез, ә алар эчке аркылы ятучы почмаклар, димәк, *a* ∥ *c*. Шулай булгач, *A* ноктасыннан *a* турысына параллель ике туры үтә. Бу А4 аксиомасы буенча мөмкин түгел. Димәк, безнең 1 һәм 2 почмаклары тигез түгел, дип уйлавыбыз дөрес түгел, алар тигез, теорема исбатланды.





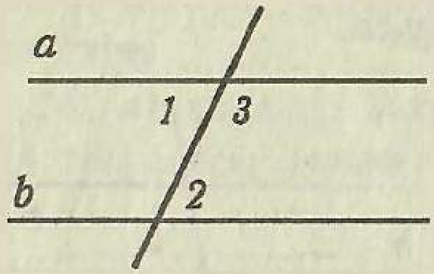
Мисал.
Бирелгән
$a \parallel b$, $\angle 1 = 142°$.
Табарга:
$\angle 7$ ын һәм $\angle 8$ ын.

Чишү:
$\angle 1 = \angle 4$ — чиктәш почмаклар: $\angle 4 = 180° - 142° = 38°$.

$\angle 4$ һәм $\angle 6$ — эчке аркылы ятучы почмаклар, ә турылар шарт буенча параллель һәм бу почмаклар 9.6 теоремасы буенча тигез: $\angle 6 = \angle 4 = 38°$. $\angle 8 = \angle 6$ — вертикаль почмаклар: $\angle 8 = 38°$. $\angle 8$ һәм $\angle 7$ — чиктәш: $\angle 7 = 180° - 38° = 142°$.

Җавап: 142° һәм 38°.

Теорема 9.7. ***Әгәр турылар параллель булса, эчке якташ почмакларның суммасы 180° ка тигез була*** ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга.)

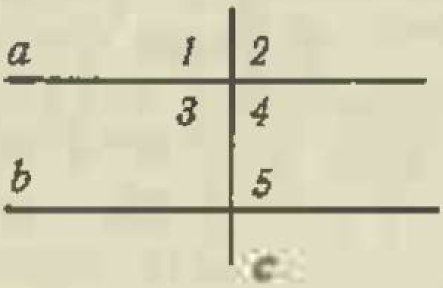


Бирелгән:
$a \parallel b$.
Исбатларга:
$\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Исбатлау:
1 һәм 3 почмаклары чиктәш, аларның суммасы 180°.

$\angle 1 + \angle 3 = 180°$, ә 9.6 теоремасы буенча 1 һәм 2 почмаклары эчке аркылы ятучы почмаклар буларак тигез. Шуңа күрә тигезләмәгә $\angle 1$ урынына $\angle 2$ ын яза алабыз, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Теорема исбатланды.

Нәтиҗә: *Әгәр туры параллель турыларның берсенә перпендикуляр булса, ул аларның икенчесенә дә перпендикуляр була* ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен нәтиҗәне исбатларга.)

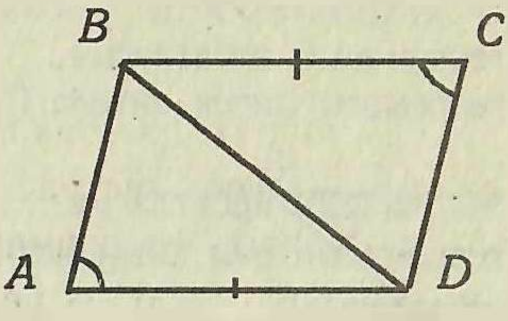


Бирелгән:
$a \parallel b$,
$a \perp c$.
Исбатларга:
$b \perp c$.

Исбатлау:

Әгәр $a \perp c$ булса, 1, 2, 3, 4 почмаклары барысы да турыпочмаклы. Шарт буенча a һәм b турылары параллель, димәк, 9.6 теоремасы буенча эчке аркылы ятучы 3 һәм 5 почмаклары тигез, ягъни 5 почмагы 90° ка тигез, ә бу $b \perp c$ дигән сүз.

Мисал.



Бирелгән:
$AD = BC$,
$\angle A = \angle C$,
$AD \parallel BC$.

Исбатларга:
$\triangle ABD = \triangle CDB$.

Исбатлау:

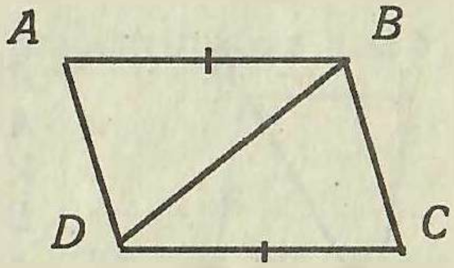
ABD һәм CDB өчпочмакларын карыйбыз:

$\left.\begin{matrix} AD = BC, \\ \angle A = \angle C \end{matrix}\right\}$ — шарт буенча

$\angle BDA = \angle DBC$ — эчке аркылы ятучы почмаклар.

Нәтиҗә: өчпочмаклар икенче билге буенча тигез.

Мисал.



Бирелгән:
$AB = DC$,
$AB \parallel DC$.

Исбатларга:
$AD \parallel BC$.

Исбатлау:

ABD һәм CBD өчпочмакларын карыйбыз. $AB = DC$ — шарт буенча, $\angle ABD = \angle CDB$ — эчке аркылы ятучы почмаклар, BD — уртак як.

Нәтиҗә: өчпочмаклар беренче билге буенча тигез. Шулай булгач, аларның барлык элементлары пар-пар тигез: $\angle ABD = \angle CDB$, алар эчке аркылы ятучы почмаклар. Эчке аркылы ятучы почмаклар тигез булса, турылар параллель, ягъни $AD \parallel BC$. (Бу мәсьәләдә ике теорема — туры һәм кире теоремалар кулланылды. Безгә турыларның параллельлеге бирелгән иде, шулай булгач, эчке аркылы ятучы почмаклар тигез, ә аннан өчпочмаклар тигезлеге килеп чыга. Өчпочмаклар тигез булгач, калган почмаклары да тигез була. Ә бу почмаклар сызымда эчке аркылы ятучы почмаклар, шуңа күрә турылар параллель.)

9 НЧЫ ЗАЧЕТ

1. Нинди почмак тышкы почмак дип атала?

2. 9.1 теоремасы ничек әйтелә (“4” һәм “5” билгеләре алу өчен исбатлагыз).

3. 9.2 теоремасын исбатлагыз.

4. 9.3 теоремасы ничек әйтелә (“4” һәм “5” билгеләре алу өчен исбатлагыз).

5. 9.4 теоремасын исбатлагыз.

6. 9.5 теоремасы ничек әйтелә (“4” һәм “5” билгеләре алу өчен исбатлагыз).

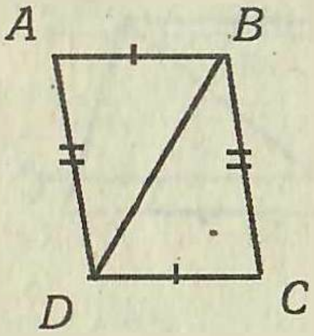
7. 9.6 теоремасын исбатлагыз.

8. 9.7 теоремасын һәм аның нәтиҗәсен әйтегез (“4” һәм "5" билгеләре алу өчен исбатлагыз).

9 нчы контроль эш

1. Параллель турыларны өченче туры белән кистергәндә барлыкка килгән почмакларның берсе 44° ка тигез. Калган җиде почмакның зурлыгын табыгыз.

2. Бирелгән:



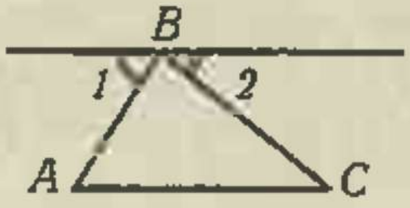
$AB = DC$,
$AD = BC$.
Исбатларга:
$BC \parallel AD$,
$AB \parallel DC$.

§ 10. ӨЧПОЧМАКНЫҢ ПОЧМАКЛАРЫ СУММАСЫ

Әгәр теләсә кайсы өчпочмакның почмакларын үлчәп, аларны кушсаң, суммасы 180° ка тигез була. Почмакларының суммасы 180° ка тигез булмаган өчпочмак уйлап булмасмы дигән сорау туа. Юк, булмый. Шуны исбатлыйк.

Теорема 10.1. ***Өчпочмакның почмаклары суммасы 180°ка тигез.***

Бирелгән:
$\triangle ABC$.
Исбатларга:
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.



Исбатлау:

B түбәсе аша *AC* турысына параллель туры үткәрәбез, 1 һәм 2 почмаклары килеп чыга. *B* түбәсе янында өч өлештән торган җәелгән почмак барлыкка килде:

$\angle 1 + \angle B + \angle 2 = 180°$.

1 почмагы *A* почмагына, 2 почмагы *C* почмагына тигез, чөнки алар эчке аркылы ятучы почмаклар. Әлеге тигезлектә 1 почмагын *A* почмагына, 2 почмагын *C* почмагына алмаштырабыз һәм түбәндәге тигезлекне алабыз:

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Теорема исбатланды.

Мәсьәлә. Өчпочмакның ике почмагы 42° һәм 76° булса, өченче почмагын табарга.

Чишү:

$\angle 3 = 180° - 42° - 76° = 62°$.

Җавап: 62°.

Мәсьәлә. Өчпочмакның бер почмагы 40° ка тигез. Әгәр икенче почмагы өченчесеннән 6 тапкыр кечерәк булса, өчпочмакның почмакларын табыгыз.

Чишү:

Икенче почмакны *x* дип билгеләсәк, өченче почмакның зурлыгы 6*x* ка тигез булыр. Өчпочмакның почмаклары суммасы 180° ка тигез булганлыктан, тигезләмә төзибез:

$$40 + x + 6x = 180,$$
$$7x = 180 - 40,$$
$$7x = 140,$$
$$x = 20,\ 20 \cdot 6 = 120.$$

Җавап: 20°, 120°, 40°.

Мәсьәлә. Турыпочмаклы өчпочмакның бер почмагы 27° булса, өчпочмакның икенче кысынкы почмагын табыгыз.

Чишү:

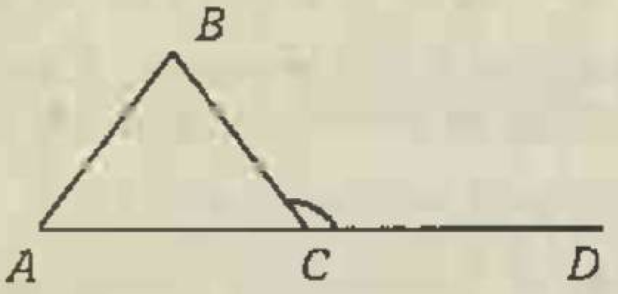
(Өчпочмак турыпочмаклы, ягъни бер почмагы 90°).

180° — 90° — 27° = 63°.

Җавап: 63°.

9 нчы параграфта өчпочмакның тышкы почмагы үзенә чиктәш булмаган теләсә кайсы эчке почмактан зуррак була дигән 9.1 теоремасын исбатлаган идек. Аннан көчлерәк теореманы исбатлыйк.

Теорема 10.2. ***Өчпочмакның тышкы почмагы үзенә чиктәш булмаган ике эчке почмакның суммасына тигез була.***



Бирелгән:
$\triangle ABC$, $\angle BCD$ — тышкы почмак.

Исбатларга:
$\angle BCD = \angle A + \angle B$.

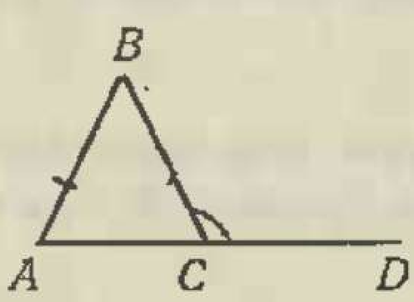
Исбатлау:

C һәм BCD почмаклары чиктәш почмаклар.

BCD почмагын табар өчен 180° тан C почмагын алырга кирәк: $\angle BCD = 180° - \angle C$.

Өчпочмакның эчке почмаклары суммасы 180°. A һәм B почмакларының зурлыкларын бергә табар өчен 180° тан C почмагын алырга кирәк: $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. Барлыкка килгән тигезләмәләрнең уң яклары тигез, шулай булгач, сул яклары да тигез була: $\angle BCD = \angle A + \angle B$. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә. Тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы тышкы почмагы 100° ка тигез булса, өчпочмакның почмакларын табарга.



Бирелгән:
$\triangle ABC$ — тигезьянлы, $AB = BC$,
$\angle BCD = 100°$.

Табарга:
$\angle A, \angle B, \angle C$.

Чишү:

$\angle C = 180° - 100° = 80°$, чөнки C һәм BCD почмаклары чиктәш почмаклар.

$\angle A = \angle C = 80°$, чөнки тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы почмаклары тигез.

$\angle B = 180° - 80° - 80° = 20°$, чөнки өчпочмакның эчке почмаклары суммасы 180° ка тигез.

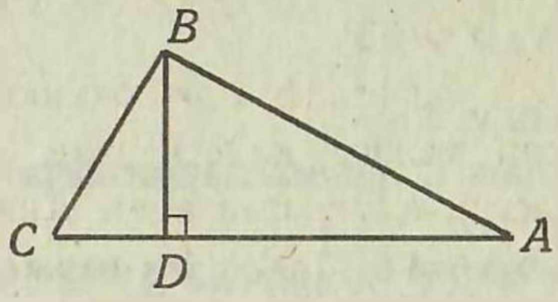
Җавап: 20°, 80°, 80°.

Мәсьәлә. ABC өчпочмагында BD биеклеге үткәрелгән. A почмагы 40°, CBD почмагы 30° ка тигез. B почмагын табарга.

Бирелгән:

$\triangle ABC$, BD — биеклек.

$\angle A = 40°$, $\angle CBD = 30°$.



Табарга:

$\angle B$ ын.

Чишү:

$\angle ADB = 90°$, чөнки BD — биеклек.

$\angle ABD = 180° - 90° - 40° = 50°$, чөнки өчпочмакның почмаклары суммасы 180° ка тигез. Бу ABD өчпочмагы өчен.

$\angle B = 50° + 30° = 80°$, чөнки B почмагы ике өлештән тора.

Җавап: 80°

Бу параграфта сез сызымсыз гына чишәргә мөмкин булган мәсьәләләр белән очраштыгыз. Ә кайсы очракта сызым кирәк соң? Әгәр мәсьәләдә барысы да аңлашылса, сызым сызмаска да мөмкин. Ләкин шуны хәтердән чыгармаска кирәк, дөрес сызылган сызым мәсьәләне чишәргә ярдәм итә.

Мисал. Өчпочмакның почмаклары чагыштырмасы 2 : 3 : 5 кебек булса, аның почмакларын табыгыз.

(Бу очракта сызым нигә? Мәсьәләне чишәр өчен бары тик өчпочмакның эчке почмаклары суммасы турындагы теореманы гына белергә кирәк.)

Чишү:

Бер өлешне x дип билгелик, ул вакытта өчпочмакның бер почмагы $2x$, ә икенче почмагы $3x$ һәм өченче почмагы $5x$ булыр.

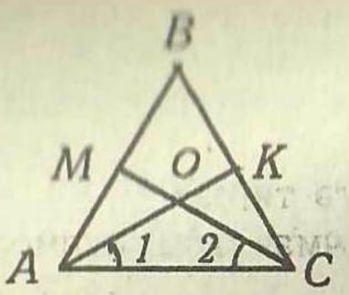
Тигезләмә:

$$2x + 3x + 5x = 180.$$
$$10x = 180,$$
$$x = 180 : 10,$$
$$x = 18.$$
$$18 \cdot 2 = 36,\ 18 \cdot 3 = 54,\ 18 \cdot 5 = 90.$$

Җавап: 36°, 54°, 90°.

"4" һәм "5" билгеләре алу өчен түбәндәге мәсьәләләрне чишәргә өйрәнегез.

Мәсьәлә. Әгәр тигезьянлы өчпочмакның түбәсе янындагы почмагы 30° булса, нигезе янындагы почмакларының биссектрисалары арасындагы почмакны табыгыз.



Бирелгән:
$\triangle ABC$ — тигезьянлы,
$AB = BC$,
AK, CM — биссектрисалар,
$\angle B = 30°$.
Табарга:
$\angle AOC$ ын.

Чишү:

(A һәм C почмакларын бергә табар өчен 180° тан B почмагын алабыз).

$\angle A + \angle C = 180° — 30° = 150°$.

(Өчпочмак тигезьянлы булганга, бу почмаклар тигез. Биссектриса почмакны урталай бүлә. Бу почмакларның яртыларының суммасын табыйк).

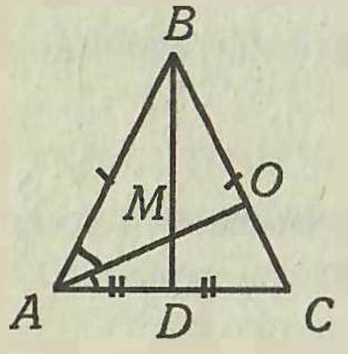
$\angle 1 + \angle 2 = 150° : 2 = 75°$.

(AOC өчпочмагының почмакларының суммасы 180°. AOC почмагын табар өчен 180° тан 75° ны алырга кирәк).

$\angle AOC = 180° — 75° = 105°$.

Җавап: 105°.

Мәсьәлә. Тигезьянлы өчпочмакның түбәсе янындагы почмагы 56°. Нигезе янындагы почмакның биссектрисасы һәм түбә янындагы почмакның медианасы арасындагы почмакны табарга.



Бирелгән:
$\triangle ABC$ — тигезьянлы,
$AB = BC$,
$\angle B = 56°$,
BD — медиана,
AO — биссектриса.
Табарга:
$\angle AMD$ ын.

Чишү:

$\angle A + \angle C = 180° — 56° = 124°$, чөнки өчпочмакның эчке почмаклары суммасы 180° ка тигез.

$\angle A = \angle C = 124° : 2 = 62°$, чөнки тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы почмаклары тигез. $\angle DAM = 62° : 2 = 31°$, чөнки биссектриса почмакны урталай бүлә.

$\angle BDA = 90°$, чөнки тигезьянлы өчпочмакта медиана биеклек тә булып тора. AMD өчпочмагында:

$\angle AMD = 180° — 90° — 31° = 59°$.

Җавап: 59°.

10 НЧЫ ЗАЧЕТ

1. 10.1 теоремасын исбатлагыз.
2. 10.2 теоремасын исбатлагыз.
3. Тигезьяклы өчпочмакның почмаклары күпмегә тигез?
4. Тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмакның почмаклары күпмегә тигез?

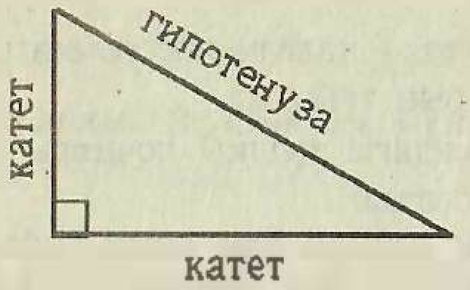
10 нчы контроль эш

1. Өчпочмакның бер почмагы 10° ка тигез, ә калган ике почмагы $10:7$ чагыштырмасында. Өчпочмакның почмакларын табыгыз.
2. Тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы тышкы почмагы 118° ка тигез булса, өчпочмакның почмакларын табыгыз.
3. ABC өчпочмагының C почмагы туры почмак һәм аның түбәсеннән CD биеклеге үткәрелгән. DCB почмагы 32° ка тигез. ABC өчпочмагының почмакларын табарга.

Геометриядә турыпочмаклы өчпочмак төп фигураларның берсе булып тора. Шуңа күрә аны җентекләбрәк карап үтик.

Б и л г е л ә м ә. *Өчпочмакның туры почмак төзүче яклары катетлар дип атала.*

Б и л г е л ә м ә. *Турыпочмаклы өчпочмакның туры почмагына каршы ятучы ягы гипотенуза дип атала.*

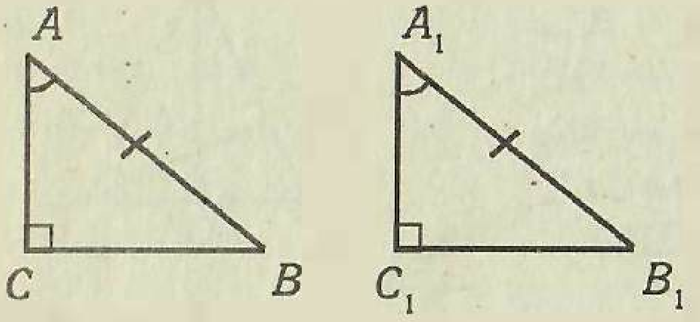


Турыпочмаклы өчпочмакта 90° лы почмак булганга күрә, аның кысынкы почмакларының суммасы 90° ка тигез.

Турыпочмаклы өчпочмаклар өчен өчпочмаклар тигезлегенең өч билгесе дә үтәлә. Ләкин бары тик турыпочмаклы өчпочмаклар өчен генә дөрес булган тагын өч билге бар. Аларны исбатлыйк.

Турыпочмаклы өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе

Т е о р е м а 11.1. ***Әгәр бер өчпочмакның гипотенузасы һәм кысынкы почмагы икенче өчпочмакның гипотенузасына һәм кысынкы почмагына тиңдәшле рәвештә тигез булса, андый өчпочмаклар тигез була.***



Б и р е л г ә н:
ΔABC һәм $\Delta A_1B_1C_1$.
$\angle C$ һәм $\angle C_1$ — туры почмаклар.
$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.
И с б а т л а р г а:
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

И с б а т л а у:

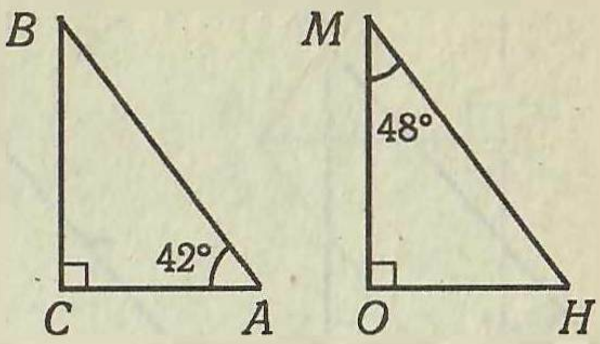
Бу турыпочмаклы өчпочмакларның бер пар үзара тигез кысынкы почмаклары бар. Ләкин ул вакытта калган кысынкы почмаклар да тигез була, чөнки алар тигез почмакларны 90° ка тутыралар. Шуңа күрә бу өчпочмакларда:

$AB = A_1B_1$,
$\angle A = \angle A_1$. } — шарт буенча.

$\angle B = \angle B_1$ — тигез почмакларны 90° ка тутыручылар буларак.

Нәтиҗә: өчпочмаклар икенче билге буенча тигез, шуны исбатларга кирәк иде дә.

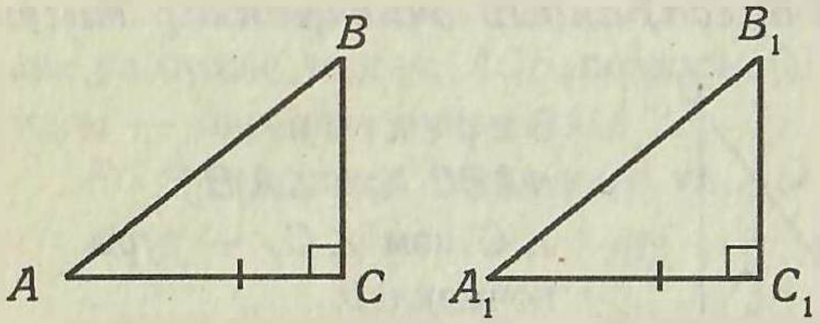
Мәсьәлә. Турыпочмаклы ABC һәм MOH өчпочмакларында C һәм O — туры почмаклар, $AB = MH$. A почмагы 42°, M почмагы 48° ка тигез. Бу почмаклар үзара тигезме?



Бирелгән:
$\triangle ABC$ һәм $\triangle MOH$,
$\angle C$ һәм $\angle O$ — туры почмаклар.
$\angle A = 42°$, $\angle M = 48°$.
Исбатларга:
$\triangle ABC = \triangle MOH$.
Исбатлау:
ABC өчпочмагында B почмагын табыйк: $\angle B = 90° - 42° = 48°$.
ABC һәм MOH өчпочмакларын карап узыйк.
Гипотенузалары бирелеш буенча тигез:
$AB = MH$.
$\angle B = \angle M = 48°$.
Нәтиҗә: Гипотенузасы һәм кысынкы почмагы буенча өчпочмаклар тигез (теорема 11.1 буенча).

Турыпочмаклы өчпочмаклар тигезлегенең икенче билгесе

Теорема 11.2. ***Әгәр бер өчпочмакның катеты һәм аңа каршы ятучы кысынкы почмагы икенче өчпочмакның катетына һәм аңа каршы ятучы кысынкы почмагына тиңдәшле рәвештә тигез булса, андый өчпочмаклар тигез була.***



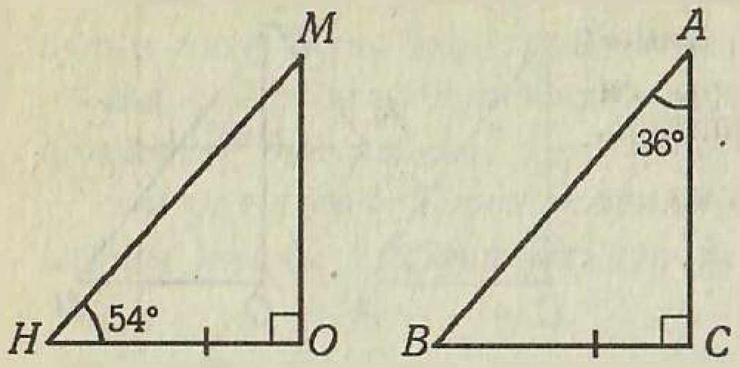
Бирелгән:
$\triangle ABC$ һәм $\triangle A_1B_1C_1$,
$\angle C$ һәм $\angle C_1$ — туры почмаклар.
$AC = A_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$.
Исбатларга:
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Исбатлау: (“4” һәм “5” билгеләре алу өчен исбатлау мәҗбүри).
Бу турыпочмаклы өчпочмакларда бер пар үзара тигез кысынкы почмаклар бар. Ләкин ул вакытта калган кысынкы почмаклар да тигез була, чөнки алар тигез почмакларны 90° ка тутыралар. Шуңа күрә бу өчпочмакларда:

$\left.\begin{array}{l} AC = A_1C_1, \\ \angle C = \angle C_1 \end{array}\right\}$ — шарт буенча.

$\angle A = \angle A_1$ — тигез почмакларны 90° ка тутыручылар буларак.
Нәтиҗә: өчпочмаклар икенче билге буенча тигез, шуны исбатларга кирәк иде дә.

М ә с ь ә л ә. *ABC* һәм *MOH* өчпочмакларында *C* һәм *O* почмаклары туры почмаклар. *AC* катеты *MO* катетына тигез. *A* почмагы 36°, *H* почмагы 54° ка тигез. Бу почмаклар тигезме?

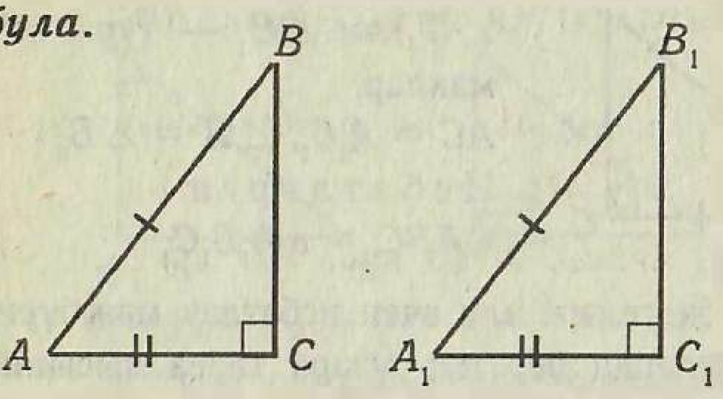


Б и р е л г ә н:
$\triangle ABC$ һәм $\triangle MOH$,
$\angle C$ һәм $\angle C_1$ — туры почмаклар.
$AC = MO$.
$\angle A = 36°$, $\angle H = 54°$.
И с б а т л а р г а:
$\triangle ABC = \triangle MOH$.

И с б а т л а у:
ABC өчпочмагында икенче кысынкы почмакны табыйк:
$\angle B = 90° - 36° = 54°$.
ABC һәм *MOH* өчпочмакларын карыйк.
$AC = MO$ — бирелеш буенча катетлар тигез.
$\angle B = \angle H = 54°$.
Н ә т и җ ә: катеты һәм аңа каршы ятучы почмагы буенча өчпочмаклар тигез. (Теорема 11.2 буенча.)

Турыпочмаклы өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесе

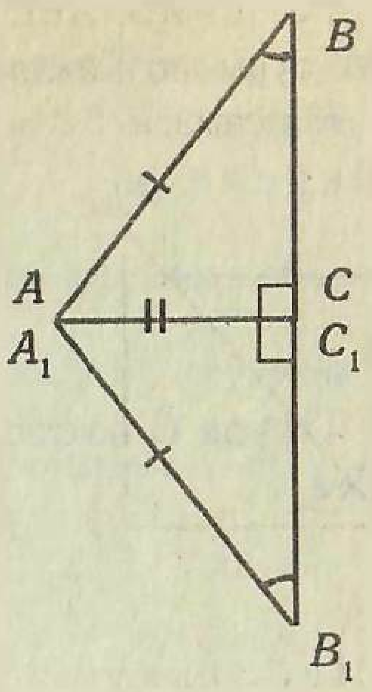
Т е о р е м а 11.3. ***Әгәр бер өчпочмакның гипотенузасы һәм катеты икенче өчпочмакның гипотенузасына һәм катетына тиңдәшле рәвештә тигез булса, андый өчпочмаклар тигез була.***



Б и р е л г ә н:
$\triangle ABC$ һәм $\triangle A_1B_1C_1$
$\angle C$ һәм $\angle C_1$ — туры почмаклар,
$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$.
И с б а т л а р г а:
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

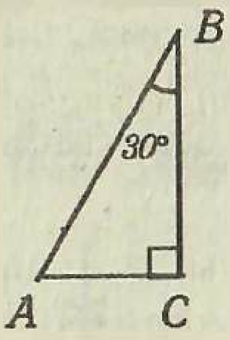
И с б а т л а у: ("5" билгесе алу өчен теореманы исбатлау мәҗбүри).
A_1C_1 катеты *AC* катетына туры килерлек итеп, $A_1B_1C_1$ өчпочмагын *ABC* өчпочмагы янына салыйк. *AC* һәм A_1C_1 катетлары тәңгәл килер, чөнки алар тигез (бирелеш буенча). *B*, *C* һәм B_1 нокталары бер турыда яталар, чөнки *C* һәм C_1 почмаклары туры почмаклар һәм икесе бергә алар җәелгән почмак тәшкил итәләр.

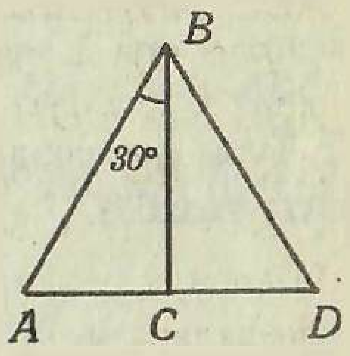
ΔABB_1 тигезьянлы, чөнки $AB = A_1B_1$ (бирелеш буенча), ә тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы почмаклары тигез, $\angle B = \angle B_1$. Димәк, ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары гипотенуза һәм кысынкы почмак буенча тигез, шуны исбат итәргә кирәк иде дә.



Теорема 11.4. ***30°лы почмакка каршы ятучы катет гипотенузаның яртысына тигез.***

Бирелгән:
ΔABC, $\angle C$ — туры почмак,
$\angle B = 30°$.
Исбатларга:
$AC = \frac{1}{2} AB$.





Исбатлау: ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен исбатлау мәҗбүри).

Тигезьяклы ABD өчпочмагын карыйк. Аның барлык почмаклары 60° лы. Анда BC медианасын үткәрик. Ул биссектриса да, биеклек тә булып тора.

BC биссектриса булганга, ABC почмагы 30° ка тигез, әле ул биеклек тә булып торгач, ACB почмагы 90° ка тигез. Димәк, ABC өчпочмагы — бирелгән өчпочмак.

BC — медиана, шуңа күрә ул AD ягын ике тигез кисәккә бүлә:

$$AC = \frac{1}{2} AD.$$

Ләкин ABD өчпочмагы тигезьяклы, шуңа күрә AD урынына AB дип яза алабыз:

$$AC = \frac{1}{2} AB,$$

шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мәсьәлә. Бер почмагы 30° ка тигез булган турыпочмаклы өчпочмакта гипотенуза 20 см га тигез. 30° лы почмакка каршы ятучы катетны табыгыз.

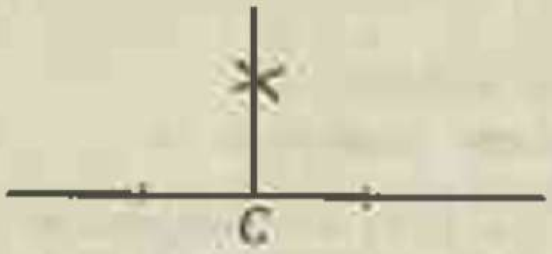
Чишү:
11.4 теоремасы буенча
20 : 2 = 10 (см).
Җавап: 10 см.

Мәсьәлә. Гипотенузасы һәм катеты буенча турыпочмаклы өчпочмак төзергә.

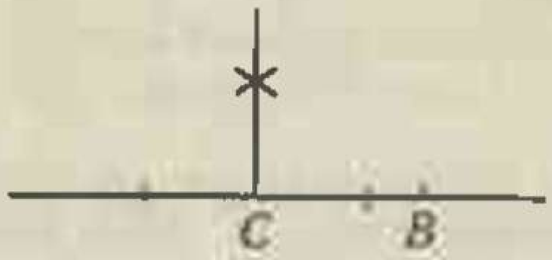
Бирелгән:

Төзү:

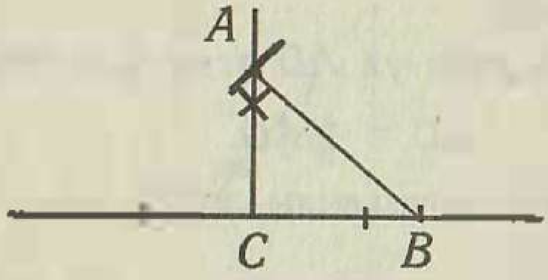
1. Турыда *C* ноктасы алабыз һәм бу ноктада турыга перпендикуляр төзибез.



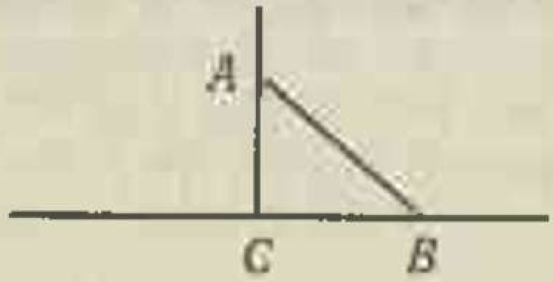
2. Туры почмакның бер ягында озынлыгы *a* катетына тигез булган кисемтә төзибез.



3. Үзәге *B* ноктасында булган һәм радиусы гипотенузага тигез булган дуга үткәрәбез. *A* ноктасы табыла.



4. *A* һәм *B* нокталарын тоташтырабыз. *ABC* өчпочмагы без эзләгән өчпочмак: аның катеты *a* кисемтәсенә, ә гипотенузасы *c* кисемтәсенә тигез.



11 НЧЕ ЗАЧЕТ

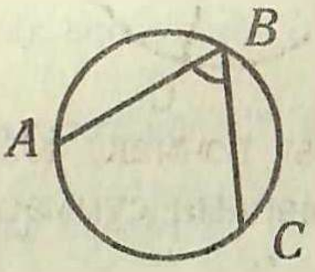
1. Нәрсә ул катет?
2. Нәрсә ул гипотенуза?
3. 11.1 теоремасын исбатлагыз.
4. 11.2 теоремасы ничек әйтелә? ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен исбатларга.)
5. 11.3 теоремасы ничек әйтелә? ("4" һәм "5" билгесе алу өчен аны исбатларга.)
6. 11.4 теоремасы ничек әйтелә? ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен теореманы исбатларга.)

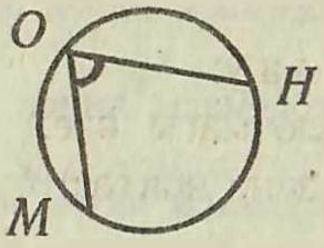
11 нче контроль эш

1. Турыпочмаклы ABC һәм MOH өчпочмакларында C һәм O почмаклары туры, A почмагы 24°, H почмагы 66° ка тигез, $AB = MO$. ABC һәм MOH өчпочмакларының тигез икәнен исбатлагыз.
2. Катеты һәм бу катет янында ятучы кысынкы почмагы буенча турыпочмаклы өчпочмак төзегез.

§ 12. КАМАУЛЫ ПОЧМАКЛАР

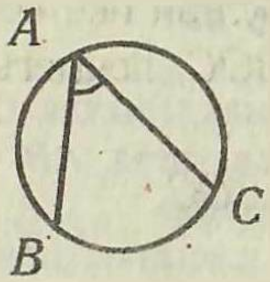
Билгеләмә. *Түбәсе әйләнәдә яткан, ә яклары хордалар булган почмак әйләнәгә камаулы почмак дип атала.*

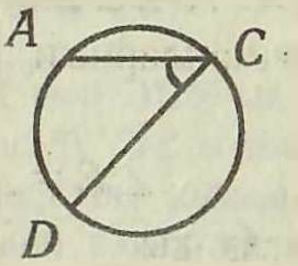




ABC — камаулы почмак *MOH* — камаулы почмак

Һәр камаулы почмак әйләнәнең дугасына таяна.

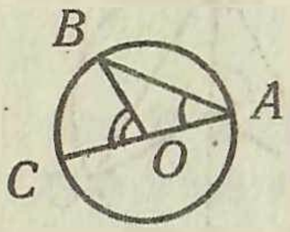


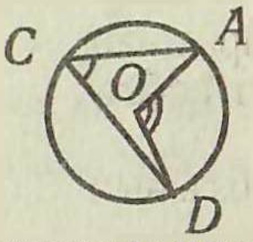


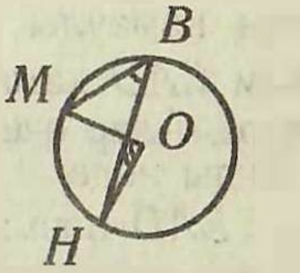
Камаулы *A* почмагы *BC* дугасына таяна

Камаулы *C* почмагы *AD* дугасына таяна

Һәр камаулы почмакка шул ук дугага таянучы үзәк почмак тиңдәш була.





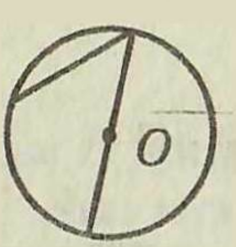


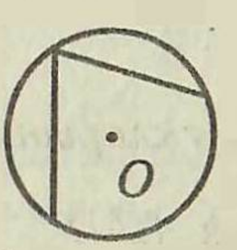
A — камаулы почмак, *BOC* — аңа тиңдәшле үзәк почмак

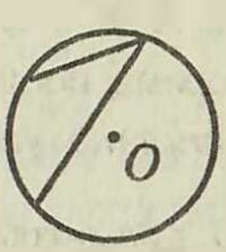
C — камаулы почмак, *AOD* — аңа тиңдәшле үзәк почмак

B — камаулы почмак, *MOH* — аңа тиңдәшле үзәк почмак

Камаулы почмак әйләнәдә өч төрле урнашырга мөмкин:







Камаулы почмакның ягы әйләнәнең үзәге аша үтә

Әйләнәнең үзәге почмакның яклары арасында ята

Почмакның яклары әйләнә үзәгеннән бер якта ята

Теорема 12.1. ***Камаулы почмак үзенә тиңдәшле үзәк почмакның яртысына тигез.***

а) *Камаулы почмакның ягы әйләнәнең үзәге аша үтә.*

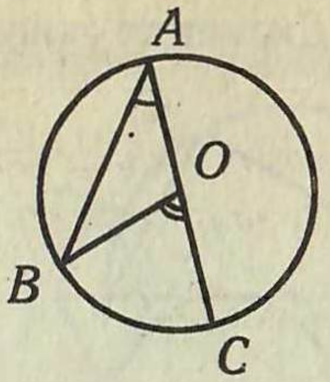
Бирелгән:

$\angle A$ — камаулы,

$\angle O$ — үзәк почмак.

Исбатларга:

$\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC$.



Исбатлау:

AOB өчпочмагы өчен *BOC* — тышкы почмак, 10.2 теоремасы буенча ул үзенә чиктәш булмаган почмакларның суммасына тигез:

$$\angle BOC = \angle A + \angle B.$$

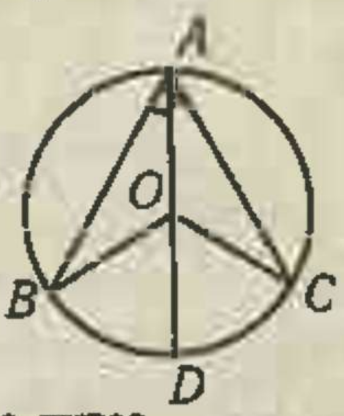
AOB өчпочмагы тигезьянлы, чөнки *AO* һәм *BO* — радиуслар. Тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы почмаклары тигез: $\angle A = \angle B$. Димәк, *BOC* почмагы үзара тигез булган ике почмак суммасына тигез, димәк, почмакларның һәрберсе *BOC* почмагының яртысына тигез.

$$\angle B = \angle A = \frac{1}{2} \angle BOC.$$

Теорема исбатланды.

("4" һәм "5" билгеләре алу өчен почмакның яклары әйләнә үзәге аша үтмәгән очракларны да исбатларга.)

б) *Әйләнәнең үзәге почмакның яклары арасында ята.*



AD диаметрын уздырабыз. Безнең камаулы *A* почмагы ике *BAD* һәм *CAD* камаулы почмакларыннан тора. Алар өчен теорема алда исбатланды инде:

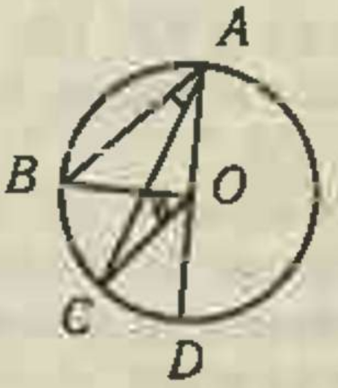
BAD почмагы *BOD* почмагының яртысына тигез.

CAD почмагы *COD* почмагының яртысына тигез.

BAD һәм *CAD* почмаклары бергә *A* почмагын тәшкил итәләр, ә *BOD* һәм *COD* почмаклары *BOC* почмагын тәшкил итәләр, шуңа күрә: $\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC$.

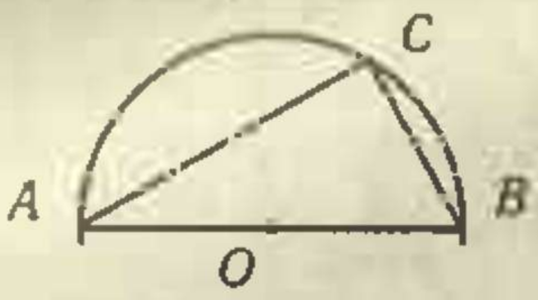
Теорема исбатланды.

в) *Әйләнә үзәге почмак якларыннан читтә ята.*



AD диаметрын уздырабыз, *BAD* һәм *CAD* камаулы почмакларын карыйбыз. Исбатлауны б) очрагына охшаш рәвештә үзегез башкарыгыз.

Нәтиҗә. Диаметрга таянган камаулы почмак туры почмак була.



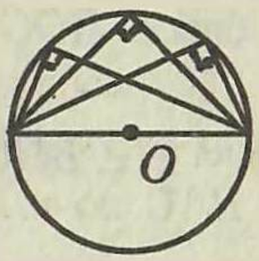
Бирелгән:
AB — диаметр,
$\angle C$ — камаулы почмак.
Исбатларга:
$\angle C = 90°$.

Исбатлау:

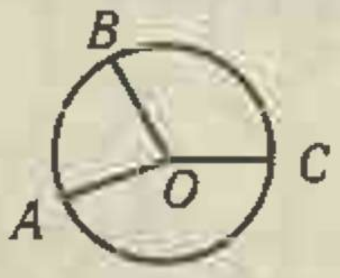
AOB почмагы җәелгән почмак, ул $180°$ ка тигез. 12.1 теоремасы буенча $\angle C = \frac{1}{2} \angle AOB$,

$$\angle C = \frac{1}{2} \cdot 180°, \quad \angle C = 90°.$$

Диаметрга таянучы барлык почмаклар да туры.



Мисал. Әйләнәнең өч радиусы $2:3:4$ чагыштырмасында өч үзәк почмак ясый. Шул почмакларны табарга.



Бирелгән:
$\angle AOB : \angle BOC : \angle COA = 2:3:4$.
Табарга:
$\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ ын.

Чишү:

Бер өлешне x дип билгелик, ул вакытта AOB почмагы $2x$, BOC почмагы $3x$, COA почмагы $4x$ булыр. Барысы бергә алар тулы почмак тәшкил итәләр.

$$2x + 3x + 4x = 360,$$
$$9x = 360,$$
$$x = 360 : 9,$$
$$x = 40,$$
$$40° \cdot 2 = 80°, 40° \cdot 3 = 120°, 40° \cdot 4 = 160°.$$

Җавап: 80°, 120°, 160°.

Мисал. Алдагы мәсьәләдә BCA почмагын табарга.

Чишү:

BCA почмагы AB дугасына таяна. Ул почмакка зурлыгы 80° ка тигез булган AOB үзәк почмагы туры килә. 12.1 теоремасы буенча BCA почмагы AOB почмагының яртысына тигез.

Җавап: 40°.

Мисал. Радиусларга тигез булган хордалар арасындагы почмакны табарга.

Бирелгән:
$AB = BC = AO$.
Табарга:
$\angle ABC$ ын.

Чишү:

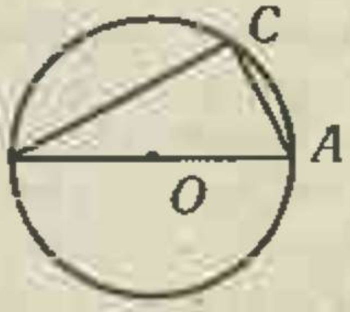
A, B һәм C нокталарын O үзәге белән тоташтырабыз. AOB һәм COB өчпочмаклары килеп чыга. Барлык яклары да әйләнәнең радиусына тигез булганлыктан, ул өчпочмаклар тигезьяклы, димәк, барлык почмаклары да 60° ка тигез. Шуңа күрә, ABC почмагы 120° ка тигез.

Җавап: 120°.

Мисал.

Әйләнәдә AB диаметры һәм AC хордасы үткәрелгән. Әгәр C ноктасы BCA дугасын, шул ноктадан исәпләгәндә, 25 һәм 11 саннарына пропорциональ кисәкләргә бүлсә, BAC почмагын табарга.

Бирелгән:
AB — диаметр,
$\cup BC : \cup CA = 25 : 11$.
Табарга:
$\angle BAC$ ын.



Чишү:

B һәм C нокталарын тоташтырабыз. C почмагы AB диаметрына таянганлыктан, ул туры почмак була (12.1 теоремасының нәтиҗәсе). A һәм B почмаклары бергә шулай ук 90° ка тигез, чөнки турыпочмаклы өчпочмакның кысынкы почмаклары суммасы 90° ка тигез.

Бер өлешне x дип билгелик. Ул вакытта A почмагы $25x$, ә B почмагы $11x$.

$25x + 11x = 90$,
$36x = 90$,
$x = 90 : 36$,
$x = 2{,}5$
$2{,}5° \cdot 25 = 62{,}5°$.

Җавап: 62,5°.

12 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Нинди почмак камаулы почмак дип атала?
2. Нинди почмак үзәк почмак дип атала?
3. Нәрсә ул дуга?

4. 12.1 теоремасының а) очрагын исбатлагыз.

5. 12.1 теоремасының б) очрагын исбатлагыз ("4" һәм "5" ле билгесе алу өчен).

6. 12.1 теоремасының в) очрагын исбатлагыз ("5" ле алу өчен).

7. 12.1 теоремасының нәтиҗәсе ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен нәтиҗәне исбатларга).

12 нче контроль эш

1. Әйләнә 9 : 7 : 20 чагыштырмасында өч кисәккә бүленгән. Бүленү нокталары аша уздырылган хордалар арасындагы почмакларны табарга.

2. AB диаметры һәм AC хордасы арасындагы почмак 24° ка тигез. ABC өчпочмагының почмакларын табыгыз.

§ 13. НОКТАЛАРНЫҢ ГЕОМЕТРИК УРЫНЫ

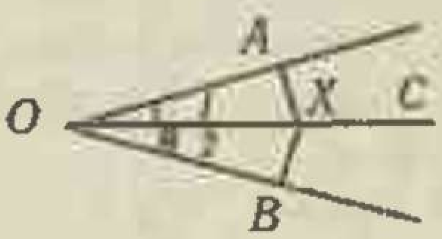
Билгеләмә. *Нокталарның геометрик урыны дип билгеле бер үзлеккә ия булган барлык нокталар күплеге атала.*

Мисал.

Әйләнә — нокталарның геометрик урыны. Әйләнәнең барлык нокталары бер үзлеккә ия: алар барысы да әйләнәнең үзәгеннән бер үк ераклыкта яталар.

Фигура нокталарның геометрик урыны булуын исбатлау өчен, фигураның барлык нокталары бер үк төрле үзлеккә ия булганын исбатларга кирәк.

Теорема 13.1. ***Почмакның биссектрисасы бу почмак якларыннан бертигез ераклыкта ятучы нокталарның геометрик урыны була.***



Бирелгән:

$\angle O$, OC — биссектриса.

Исбатларга:

OC ның теләсә кайсы ноктасы почмак якларыннан бертигез ераклыкта ята.

Исбатлау: (“4” һәм “5” билгеләре алу өчен исбатлау мәҗбүри).

Биссектрисада теләсә нинди X ноктасы алыйк, аннан почмак якларына перпендикуляр төшерик. Бу XA һәм XB перпендикулярлары X ноктасыннан почмак якларына кадәр ераклыклар була. $XA = XB$ икәнен исбатлыйк.

OAX һәм OBX өчпочмакларын карыйк.

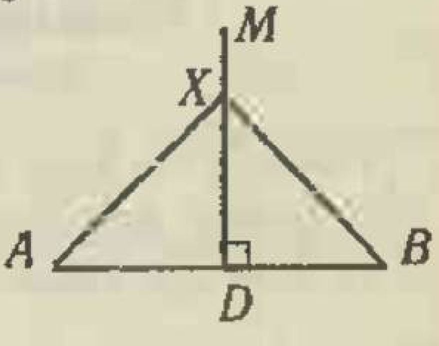
Аларда: OX — уртак як,

$\angle 1 = \angle 2$, чөнки OC — биссектриса.

Төзү буенча бу өчпочмаклар турыпочмаклы.

Нәтиҗә: гипотенузасы һәм кысынкы почмагы буенча бу өчпочмаклар тигез. Ә өчпочмаклар тигез булгач, аларның барлык элементлары да тиңдәшле рәвештә пар-пар тигез була: $XA = XB$, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Теорема 13.2. ***Кисемтәнең уртасы аша үткәрелгән перпендикуляр бу кисемтә очларыннан бертигез ераклыкта ятучы нокталарның геометрик урыны була.***



Бирелгән:

$AD = BD$,

$DM \perp AB$.

Исбатларга:

DM ның теләсә нинди ноктасы A һәм B нокталарыннан бертигез ераклыкта ята.

Исбатлау:

DM перпендикулярында теләсә нинди *X* ноктасын алыйк һәм аны *A* һәм *B* нокталары белән тоташтырыйк. Барлыкка килгән *ADX* һәм *BDX* өчпочмакларын карыйк. Аларда:

AD = *BD* — бирелеш буенча,

DX — уртак як.

Бу өчпочмаклар турыпочмаклы, чөнки *DX* — перпендикуляр.

Нәтиҗә: өчпочмаклар беренче билге буенча тигез. Ә өчпочмаклар тигез икән, аларның барлык элементлары да тиңдәшле рәвештә тигез: *AX* = *BX*, шуны исбатларга кирәк иде дә.

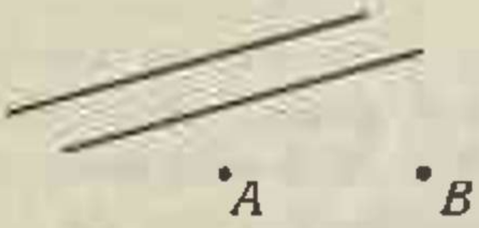
Түбәндәгеләрне истә тотыгыз:

1. Почмакның биссектрисасында бу почмак якларыннан бертигез ераклыкта ятучы нокталар урнашкан.

2. Кисемтәнең уртасы аша үткәрелгән перпендикулярда бу кисемтәнең очларыннан бертигез ераклыкта ятучы нокталар урнашкан.

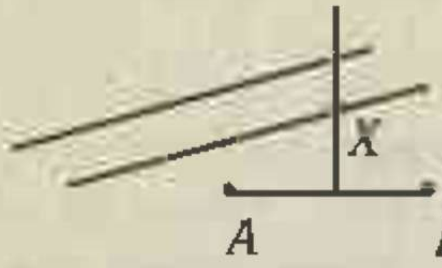
3. Әйләнәдә аның үзәгеннән бертигез ераклыкта ятучы нокталар урнашкан.

Мисал.



A һәм *B* кешеләре юлдан төрле ераклыкта яшиләр. *A* һәм *B* га бертигез ераклыкта булырлык итеп, автобус тукталышын кая төзергә кирәк?

1. Башта *A* һәм *B* дан бертигез ераклыкта ятучы нокталарны табыйк. Моның өчен *AB* ның уртасы аша перпендикуляр үткәрик. Бу перпендикулярда *A* дан да, *B* дан да бертигез ераклыкта булган нокталар урнашкан.



2. Безгә кирәкле нокта перпендикуляр белән юлның кисешү ноктасы: ул перпендикулярда ята, димәк, *A* дан да, *B* дан да бер үк ераклыкта. Бу нокта юлда урнашкан, димәк, ул без эзләгән нокта.

Нокталарның геометрик урынына карата мәсьәләләр чишү кагыйдәләре

Ике шартка туры килүче нокталарны табу өчен:

1) беренче шартны канәгатьләндерүче барлык нокталарны табарга;

2) алар арасыннан икенче шартны канәгатьләндерүче нокталарны

сайлап алырга кирәк. Безнең мисалда ике төрле шартны канәгатьләндерүче нокталар табарга кирәк иде:

1) бу нокталардан *A* га да, *B* га да бер үк ераклык булырга тиеш.

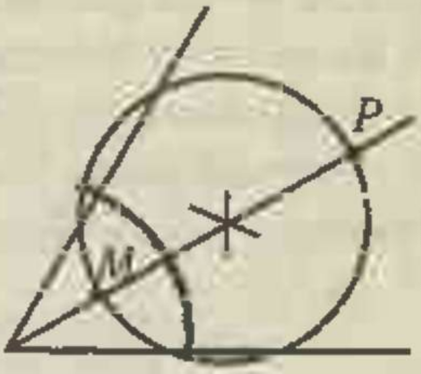
2) бу нокталар юл кырыенда булырга тиеш. Без *A* һәм *B* нокталарыннан бертигез ераклашкан нокталар таптык. Алар барысы да *AB* кисемтәсенең уртасы аша узучы перпендикулярларда яталар. Бу нокталар арасыннан юл кырыенда яткан ноктаны сайлап алдык. Юлның икенче ягындагы ноктаны да алырга була иде, ләкин автобус тукталышларын беркем дә алай төземи.

Мисал.

Әйләнә почмак якларын кисеп үтә. Әйләнәдә почмак якларыннан бертигез ераклыкта булган нокталарны табарга.

Чишү:

Башта почмак якларыннан бертигез ераклашкан нокталарны эзлибез. Алар почмакның биссектрисасында ята. Биссектрисаны төзибез.



Биссектрисадагы нокталарның әйләнәдә ятучыларын сайлап алабыз. Бу *M* һәм *P* нокталары.

M һәм *P* нокталары биссектрисада ята (беренче шарт үтәлгән).

M һәм *P* нокталары әйләнәдә ята (икенче шарт үтәлгән).

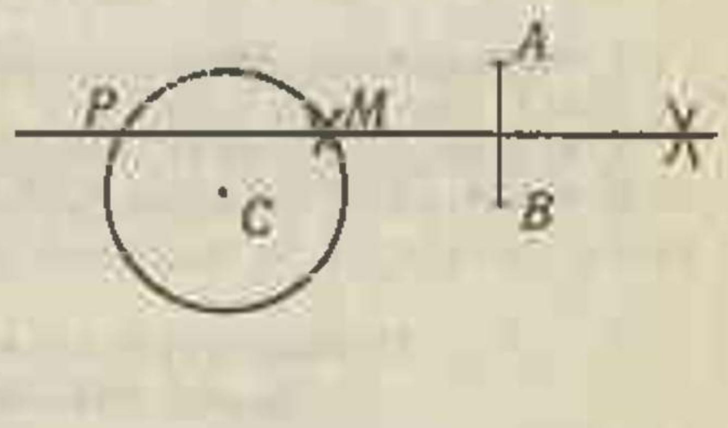
Мисал.

Бирелгән *A* һәм *B* нокталарыннан бертигез ераклашкан һәм *C* ноктасыннан 3 см ераклыкта яткан нокталарны табыгыз.

Чишү:

A һәм *B* нокталарыннан бертигез ераклашкан нокталарны табыйк. Алар *AB* кисемтәсенең уртасы аша узучы перпендикулярда яталар. Перпендикуляр төзибез:

C ноктасыннан 3 см ераклыкта ятучы нокталарны табыйк. Алар үзәге *C* ноктасы һәм радиусы 3 см булган әйләнәдә ята. Әйләнә төзибез.



Әйләнә белән перпендикуляр *M* һәм *P* нокталарында кисешә. Бу нокталар без эзләгән нокталар.

M һәм *P* перпендикулярда яталар, димәк, *A* һәм *B* дан бертигез ераклыкта.

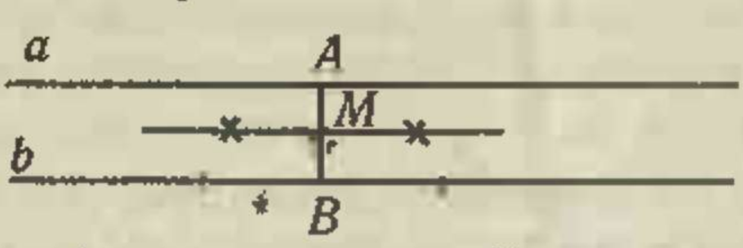
M һәм *P* әйләнәдә яталар, димәк, алар *C* ноктасыннан 3 см ераклыкта.

М и с а л ("4" һәм "5" билгеләре алу өчен).

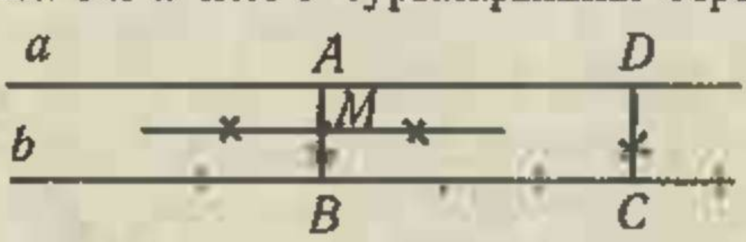
Ике параллель турыдан бертигез ераклыкта яткан нокталарның геометрик урынын табарга.

Ч и ш ү:

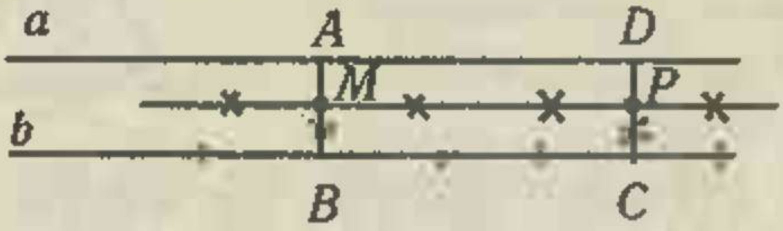
1)



Бу мәсьәләдә бер шарт куелган. Башта *a* һәм *b* турыларыннан бертигез ераклашкан бер ноктаны табыйк. Моның өчен бер турының теләсә нинди ноктасы аша аңа перпендикуляр төзик. Перпендикулярның параллель турылар арасындагы кисемтәсен урталай бүлик. *M* ноктасын таптык. Ул *a* һәм *b* турыларыннан бертигез ераклашкан.



Шулай ук итеп *P* ноктасын да табабыз.



M һәм *P* нокталарын тоташтырып, *MP* турысын табабыз. Бу турыда *a* һәм *b* турыларыннан бертигез ераклашкан нокталар урнашкан.

Әгәр мәсьәләдә бер генә шарт икән, башта бу шартны канәгатьләндерүче бер ноктаны табарга, аннары икенчесен, өченчесен, һәм башкаларын,соңыннан аларны тоташтырырга кирәк. Нокталарны җавапта нинди фигура буласы ачыкланганчы табарга.

13 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Нокталарның геометрик урыны дип нәрсә атала?
2. 13.1. теоремасын исбатларга.
3. 13.2. теоремасы ничек әйтелә?
4. Нокталарның геометрик урынына мәсьәләләр чишүнең кагыйдәсен әйтегез. "4" һәм "5" ле билгеләре алу өчен 13.2. теоремасын исбатларга.

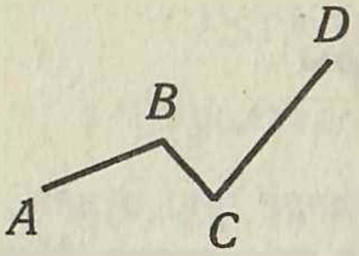
13 нче контроль эш

1. Үзәге *O* ноктасы булган әйләнәдә *A* ноктасы билгеләнгән. Әйләнәдә *O* һәм *A* нокталарыннан тигез ераклыкта яткан нокталарны табыгыз.

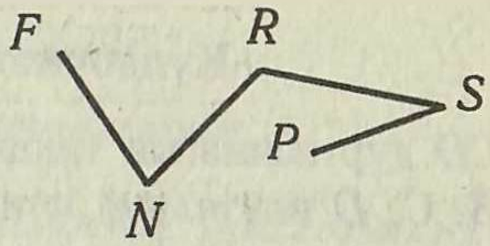
2. Туры бирелгән почмакның якларын кисеп үтә. Бу турыда почмак якларыннан тигез ераклыкта ятучы нокталарны табыгыз.

§ 14. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Билгеләмә. *Алдагы кисемтәнең ахыргы очы аннан соң килгән кисемтәнең башлангыч очы белән тәңгәл килерлек итеп, кисемтәләрдән төзелгән фигура* ***сынык сызык*** *дип атала.*

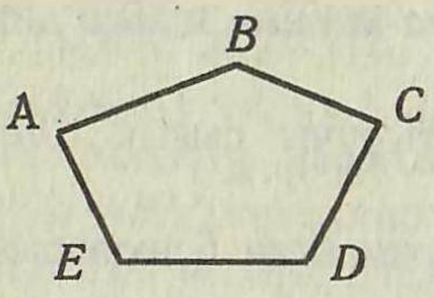


ABCD сынык сызыгы

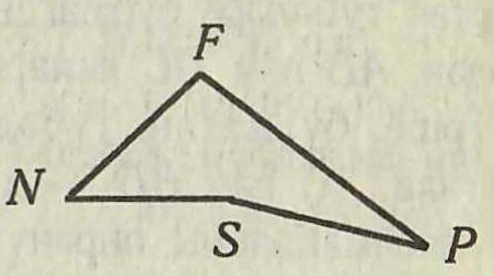


FNRSP сынык сызыгы

Билгеләмә. *Соңгы кисемтәнең ахыргы очы беренче кисемтәнең башлангыч очы белән тәңгәл килгәндә, сынык сызык* ***йомык сынык сызык*** *дип атала.*

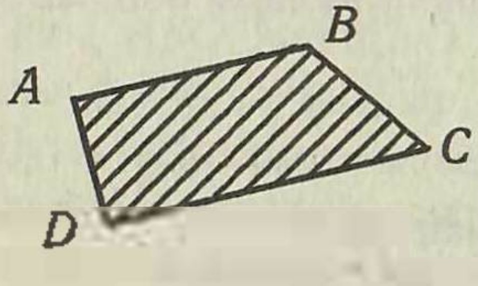


Йомык *ABCDE* сынык сызыгы

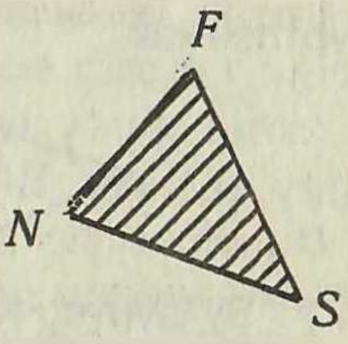


Йомык *NFPS* сынык сызыгы

Билгеләмә. *Яссылыкның йомык сынык сызык белән чикләнгән өлеше* ***күппочмак*** *дип атала.*

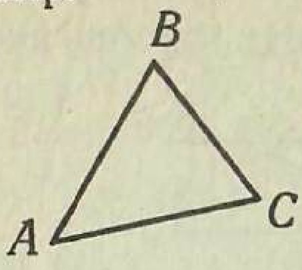


ABCD күппочмагы

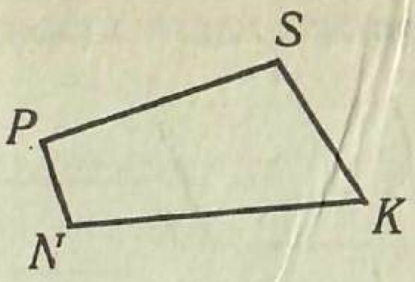


NFS күппочмагы

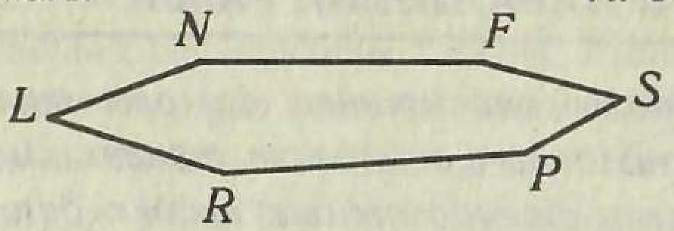
Күппочмаклар почмаклары һәм якларының саны белән аталып йөртеләләр.



ABC өчпочмагы



NPSK дүртпочмагы



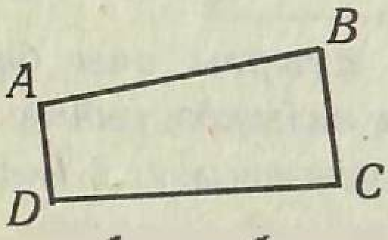
LNFSPR алтыпочмагы

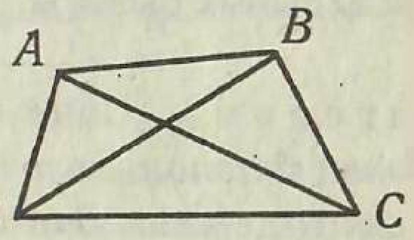
Күппочмакның элементлары

ABCD дүртпочмагын тикшерик.

A, B, C, D нокталары күппочмакның *түбәләре* дип атала.

Уртак түбәләре булган яклар *күрше яклар* дип атала. Мәсәлән, *AB* һәм *BC* яклары.

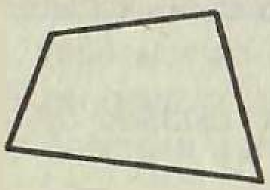




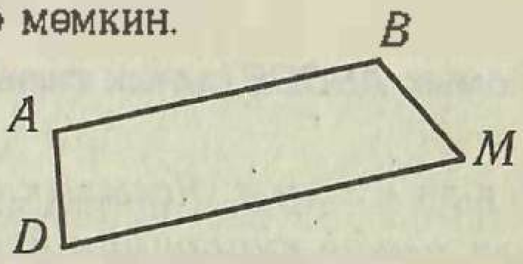
Уртак түбәләре булмаган яклар *капма-каршы яклар* дип атала. Мәсәлән, *AB* һәм *DC* яклары.

Күрше булмаган түбәләрне тоташтыручы сызык *диагональ* дип атала. *AC* һәм *BD* — диагональләр.

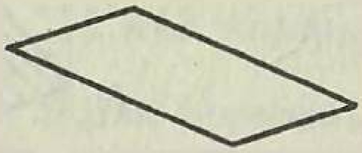
Күппочмакларны өйрәнүне без дүртпочмактан башларбыз. Дүртпочмакларны өч төрле группага бүләргә мөмкин.



Гади дүртпочмак

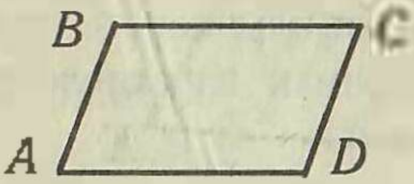


Бу дүртпочмакның бер пар параллель яклары бар, *AB*||*DM*

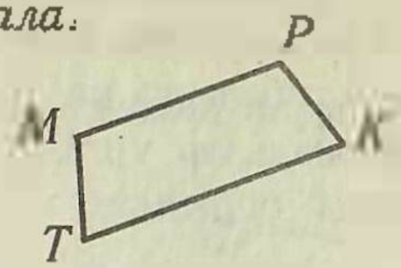


Бу дүртпочмакның капма-каршы якларының ике пары да үзара параллель

Б и л г е л ә м ә. *Капма-каршы яклары үзара параллель булган дүртпочмак параллелограмм дип атала.*



ABCD — параллелограмм, бирeдә *AD* ∥ *BC* һәм *AB* ∥ *DC*



Бу параллелограмм түгел, бирeдә *MP* ∥ *KT*, ләкин *MT* *PK* га параллель түгел

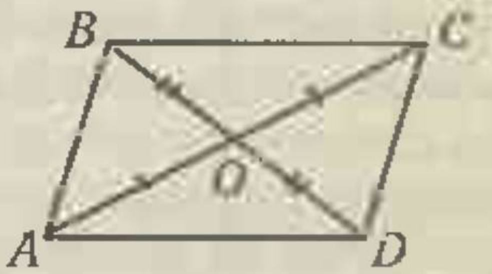
Нинди дә булса дүртпочмакның параллелограмм түгелме икәнлеген ничек тикшерергә соң? Бу сорауга параллелограммның билгеләре җавап бирә.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ БИЛГЕЛӘРЕ

Параллелограммның беренче билгесе

Т е о р е м а 14.1. ***Әгәр дүртпочмакның диагональләре кисешү ноктасында урталай бүленсә, бу дүртпочмак параллелограмм була.***

Б и р е л г ә н:
ABCD — дүртпочмак,
AO = *CO* һәм *BO* = *DO*.
И с б а т л а р г а:
ABCD — параллелограмм.



И с б а т л а у:

Бу дүртпочмакның параллелограмм икәнлеген исбатлау өчен түбәндәгеләрне исбатларга кирәк: 1) *AB* һәм *CD* яклары параллель һәм 2) *BC* һәм *AD* яклары параллель.

1) *AOB* һәм *COD* өчпочмакларын тикшерик. Аларда:
AO = *OC*,
BO = *OD*,
ә ∠ *AOB* = ∠ *COD*, вертикаль почмаклар буларак.

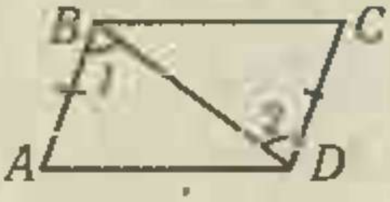
Нәтиҗә: өчпочмаклар беренче билге буенча үзара тигез. Ә инде тигез өчпочмакларда барлык элементлар тиңдәшле рәвештә тигез була, шулай булгач, *ABO* һәм *CDO* почмаклары да үзара тигез. Ләкин алар аркылы ятучы почмаклар, шунлыктан, *AB* һәм *CD* үзара параллель. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

2) *BC* һәм *AD* якларының параллельлекләрен исбатлау өчен *BOC* һәм *AOD* өчпочмакларын тикшерергә һәм шулай ук фикер йөртергә кирәк.

Димәк, дүртпочмакның беренче билгесе буенча параллелограмм икәнлеген исбатлау өчен диагональләр үткәрергә һәм аларның кисешү ноктасыннан түбәләргә кадәрге өлешләренең озынлыкларын үлчәргә кирәк. Диагональләр урталай бүленсә, дүртпочмак параллелограмм булыр, урталай бүленмәсә — бу гади дүртпочмак.

Параллелограммның икенче билгесе

Теорема 142. ***Дүртпочмакның капма-каршы ике ягы параллель һәм тигез булса, бу дүртпочмак параллелограмм була.***



Бирелгән:
ABCD — дүртпочмак,
$AB = CD$,
$AB \parallel CD$.
Исбатларга:
ABCD — параллелограмм.

Исбатлау:

BD диагонален үткәрәбез. *ABD* һәм *BCD* өчпочмакларын тикшерик.

$AB = CD$ — шарт буенча,

$\angle 1 = \angle 2$ — *AB* һәм *CD* параллель турылары янындагы аркылы ятучы почмаклар буларак, *BD* — уртак як.

Нәтиҗә: өчпочмаклар беренче билге буенча үзара тигез. Ә тигез өчпочмакларның тиңдәшле элементлары үзара тигез була, шуңлыктан, $\angle 3 = \angle 4$. Ләкин бу почмаклар — аркылы ятучы почмаклар, шуңа күрә *BC* һәм *AD* яклары параллель булалар.

Шулай итеп, бу дүртпочмакта:

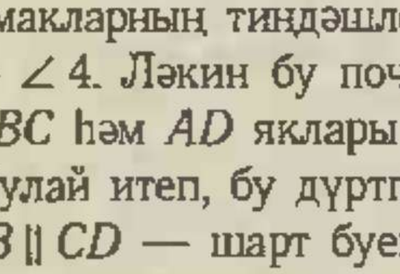
$AB \parallel CD$ — шарт буенча,

$BC \parallel AD$ — исбатлау буенча.

Нәтиҗә: дүртпочмакның капма-каршы яклары пар-пар параллель, димәк, бу дүртпочмак параллелограмм була. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Параллелограммның өченче билгесе

Теорема 143. ***Дүртпочмакның капма-каршы яклары пар-пар тигез булса, бу дүртпочмак параллелограмм була.***



Бирелгән:
$AB = CD,\ BC = AD$.
Исбатларга:
ABCD — параллелограмм.
Бу билгене үзлегегездән исбатлагыз.
Күрсәтмә: *BD* диагоналең үткәрегез.

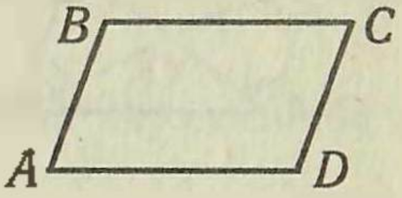
Параллелограммның үзлекләре

Параллелограммның биш үзлеге бар.

Теорема 14.4. ***Параллелограммның капма-каршы яклары тигез була.***

Бирелгән:

ABCD — параллелограмм.

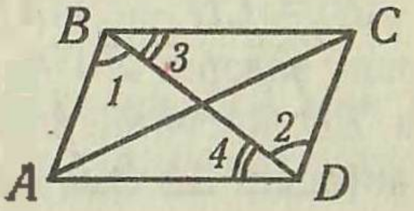


Исбатларга:

$AB = CD$ һәм $BC = AD$.

Исбатлау:

BD диагонален үткәрәбез. 1, 2, 3, 4 почмакларын таптык. *ABD* һәм *BCD* өчпочмакларын тикшерик. Аларда:



BD — уртак як,

$\angle 1 = \angle 2$ — чөнки алар *AB* һәм *CD* параллель турылары янындагы аркылы ятучы почмаклар,

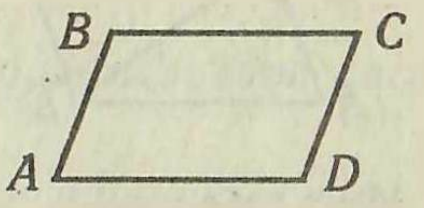
$\angle 3 = \angle 4$ — чөнки алар *BC* һәм *AD* параллель турылары янындагы аркылы ятучы почмаклар.

Нәтиҗә: өчпочмаклар икенче билге буенча тигез. Ә тигез өчпочмакларда барлык элементлар пар-пар тигез була, шунлыктан *AB* һәм *CD* да, *AD* һәм *BC* да үзара тигез. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Теорема 14.5. ***Параллелограммның капма-каршы почмаклары тигез була.***

Бирелгән:

ABCD — параллелограмм.



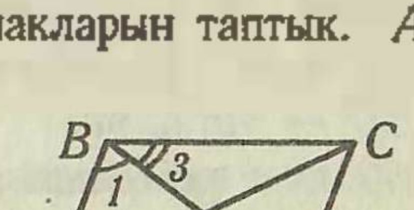
Исбатларга:

$\angle A = \angle C$,

$\angle B = \angle D$.

Исбатлау:

BD диагонален үткәрәбез. 1, 2, 3, 4 почмакларын таптык. *ABD* һәм *BCD* почмакларын тикшерик. Аларда:



BD — уртак як,

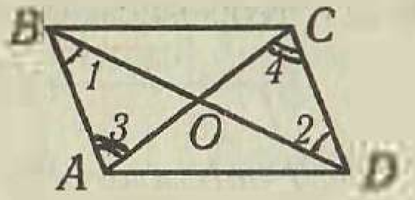
$\angle 1 = \angle 2$, чөнки алар *AB* һәм *CD* параллель турылары янындагы аркылы ятучы почмаклар,

$\angle 3 = \angle 4$, чөнки алар *BC* һәм *AD* параллель турылары янындагы аркылы ятучы почмаклар.

Нәтиҗә: өчпочмаклар икенче билге буенча тигез. Ә тигез өчпочмакларда барлык элементлар да пар-пар тигез була. Шунлыктан *A* һәм *C* почмаклары да үзара тигез. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

B һәм *D* почмакларының тигезлеген исбатлау өчен *AC* диагонален үткәрергә, *ABC* һәм *ADC* өчпочмакларын тикшерергә кирәк.

Теорема 14.6. ***Параллелограмм диагональләре кисешү ноктасында урталай бүленәләр.***



Бирелгән:
ABCD — параллелограмм,
AC һәм *BD* — диагональләр.
Исбатларга:
AO = *CO* һәм *BO* = *DO*.

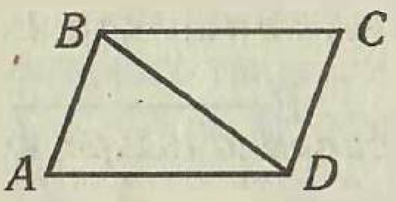
Исбатлау:

1, 2, 3 һәм 4 почмакларын билгелик. *ABO* һәм *CDO* өчпочмакларын тикшерик. Аларда:

AB = *CD* — 14.4 теоремасы буенча параллелограммның капма-каршы яклары. ∠1 = ∠2, чөнки алар *AB* һәм *CD* параллель яклары һәм *BD* кисүчесе янындагы аркылы ятучы почмаклар. ∠3 = ∠4, чөнки алар *AB* һәм *CD* параллель турылары һәм *AC* кисүчесе янындагы аркылы ятучы почмаклар.

Нәтиҗә: өчпочмаклар икенче билге буенча тигез. Ә тигез өчпочмакларда барлык элементлар пар-пар тигез була. Шунлыктан *AO* = *CO* һәм *BO* = *DO*. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Теорема 14.7. ***Параллелограммның диагонале аны ике тигез өчпочмакка бүлә.***



Бирелгән:
ABCD — параллелограмм,
BD — диагональ.
Исбатларга:
△*ABD* = △*BCD*.

Исбатлау:

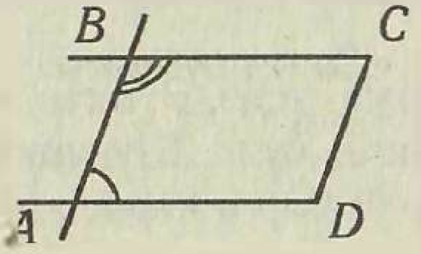
ABD һәм *BCD* өчпочмакларын тикшерик. Аларда:

AB = *CD*, *AD* = *BC* } — 14.4 теоремасы буенча, параллелограммның капма-каршы яклары буларак,

BD — уртак як.

Нәтиҗә: өчпочмаклар өченче билге буенча тигез. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Теорема 14.8. ***Параллелограммның бер ягы янындагы почмаклары суммасы 180° ка тигез.***



Бирелгән:
ABCD — параллелограмм.
Исбатларга:
∠*A* + ∠*B* = 180°.

Исбатлау:

Дүртпочмак параллелограмм, шуңа күрә BC һәм AD турылары параллель. Бу турыларны AB турысы кисеп үтә. A һәм B почмаклары — BC һәм AD параллель турылары янындагы эчке якташ почмаклар һәм аларның суммасы 180° ка тигез (9.7 теоремасы буенча). Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Нәтиҗәләр ясыйк:

Билгеләмә. *Капма-каршы яклары пар-пар параллель булган дүртпочмак параллелограмм дип атала.*

Параллелограммның билгеләрен кабатлап үтик:

Теорема 14.1. ***Әгәр дүртпочмакның диагональләре кисешү ноктасында урталай бүленсә, бу дүртпочмак параллелограмм була.***

Теорема 14.2. ***Дүртпочмакның капма-каршы ике ягы параллель һәм тигез булса, бу дүртпочмак параллелограмм була.***

Теорема 14.3. ***Дүртпочмакның капма-каршы яклары пар-пар тигез булса, бу дүртпочмак параллелограмм була.***

Параллелограмм үзлекләрен кабатлап үтик:

Теорема 14.4. ***Параллелограммның капма-каршы яклары тигез була.***

Теорема 14.5. ***Параллелограммның капма-каршы почмаклары тигез була.***

Теорема 14.6. ***Параллелограмм диагональләре кисешү ноктасында урталай бүленә.***

Теорема 14.7. ***Параллелограммның диагонале аны ике тигез почмакка бүлә.***

Теорема 14.8. ***Параллелограммның бер ягы янындагы почмаклары суммасы 180° ка тигез.***

Мисал.

Параллелограммның периметры 100 см. Аның бер ягы 20 см га тигез. Башка якларын табарга.

Чишү:

14.4 теоремасы буенча параллелограммның капма-каршы ягы да 20 см булыр.

100 - 20 - 20 = 60 (см) — калган ике ягының суммасы.

60 : 2 = 30 (см) — бу яклар да үзара тигез була.

Җавап: 30 см, 20 см, 30 см.

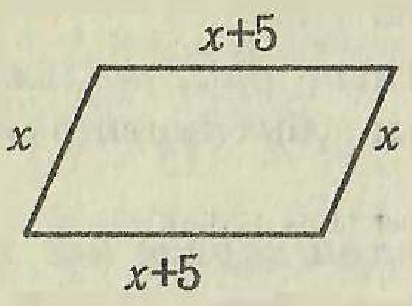
Мисал. Параллелограммның бер ягы икенче ягыннан 5 см га зуррак, ә периметры 10 см га тигез. Параллелограммның якларын табарга.

Чишү:

Кечерәк якның озынлыгын x см дип билгелик, зуррак якның озынлыгы $(x + 5)$ см булыр.

14.4 теоремасы буенча параллелограммның капма-каршы яклары тигез һәм аларның озынлыклары да x см һәм $(x + 5)$ см булыр.

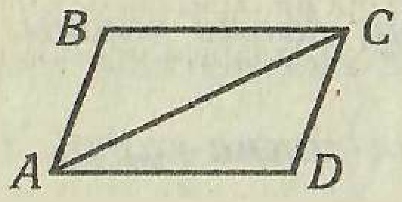
Тигезләмә төзеп, аны чишик:



$x + x + 5 + x + x + 5 = 130,$
$4x + 10 = 130,$
$4x = 130 - 10,$
$4x = 120,$
$x = 30.$
$30 + 5 = 35$ (икенче ягы).

Җавап: 30 см, 35 см, 30 см, 35 см.

Мисал. $ABCD$ параллелограммында AC диагонале үткәрелгән. Параллелограммның периметры 100 см, ABC өчпочмагының периметры 60 см. AC ягын табарга.



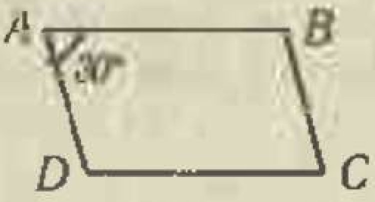
Чишү:

$100 : 2 = 50$ (см) — AB һәм BC якларының суммасы.

$60 - 50 = 10$ (см) — AC ягының озынлыгы.

Җавап: 10 см.

Мисал. Параллелограммның бер почмагы 30° ка тигез. Калган өч почмакны табарга.



Чишү:

$\angle C = 30°$, чөнки 14.5 теоремасы буенча капма-каршы почмаклар тигез була.

$\angle A + \angle B = 180°$ — 14.8 теоремасы буенча. Моннан $\angle B = 180° - 30° = 150°$.

$\angle D = 150°$ — капма-каршы почмак.

Җавап: 150°, 30°, 150°.

Мисал. Параллелограммның почмаклары 2 : 3 чагыштырмасында. Параллелограммның почмакларын табарга.

Бирелгән:
$ABCD$ — параллелограмм,
$\angle A : \angle B = 2 : 3.$
Табарга:
$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ ын.

Ч и ш ү:

Бер өлешне x дип билгелик. Ул вакытта $\angle A$ $2x$ ка, ә $\angle B$ $3x$ ка тигез булыр. 14.8 теоремасы буенча

$2x + 3x = 180$,

$5x = 180$,

$x = 36$.

$36 \cdot 2 = 72$, $36 \cdot 3 = 108$.

Җ а в а п: 72°, 108°, 72°, 108°.

14 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Нәрсә ул сынык сызык? Нинди сынык сызык йомык сынык сызык дип атала?
2. Нәрсә ул күппочмак? Күппочмакның элементлары ничек атала?
3. Нәрсә ул параллелограмм?
4. 14.1 теоремасын исбатлагыз.
5. 14.2 һәм 14.3 теоремалары ничек әйтелә?
6. Параллелограммның үзлекләрен санагыз.
7. 14.4 теоремасын исбатлагыз.
8. 14.5, 14.6, 14.7 һәм 14.8 теоремалары ничек әйтелә?

"4" ле өчен өстәмә рәвештә 14.2, 14.5 һәм 14.6 теоремаларын исбатлагыз.

"5"ле өчен өстәмә рәвештә 14.3, 14.7 һәм 14.8 теоремаларын исбатлагыз.

14 нче контроль эш

1. Параллелограммның периметры 50 см га тигез. Аның бер ягы икенче ягыннан 4 тапкыр зуррак. Параллелограммның якларын табарга.

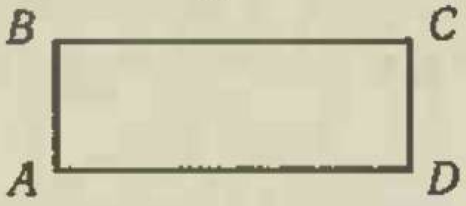
2. $ABCD$ параллелограммының периметры 100 см һәм BD диагоналенең озынлыгы 12 см. ABD өчпочмагының периметрын табарга.

3. Параллелограммның почмаклары 2 : 13 чагыштырмасында. Параллелограммның почмакларын табарга.

§ 15. ТУРЫПОЧМАКЛЫК. РОМБ. КВАДРАТ

Без капма-каршы яклары үзара параллель булган дүртпочмакны параллелограмм дип атадык. Ә параллелограммнар арасында барлык почмаклары да туры булган параллелограммнар да бар.

Билгеләмә. *Барлык почмаклары да туры булган параллелограмм турыпочмаклык дип атала.*



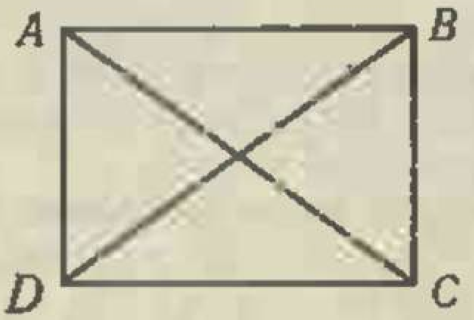
Бу — *ABCD* турыпочмаклыгы

Турыпочмаклык параллелограмм булганлыктан, ул параллелограммның барлык билгеләренә дә ия:

1. **Аның капма-каршы яклары тигез.**
2. **Аның капма-каршы почмаклары тигез.**
3. **Аның диагональләре кисешү ноктасында урталай бүленә.**
4. **Диагонале аны тигез булган ике өчпочмакка бүлә.**
5. **Аның бер ягы янында ятучы почмакларының суммасы 180° ка тигез.**

Ләкин турыпочмаклык гади параллелограмм гына түгел, ә барлык почмаклары да туры булган параллелограмм булганлыктан, аның үзенә генә хас тагын бер үзлеге бар.

Теорема 15.1. ***Турыпочмаклыкның диагональләре тигез була.***



Бирелгән:
ABCD — турыпочмаклык,
AC һәм *BD* — диагональләр.
Исбатларга:
AC = *BD*.

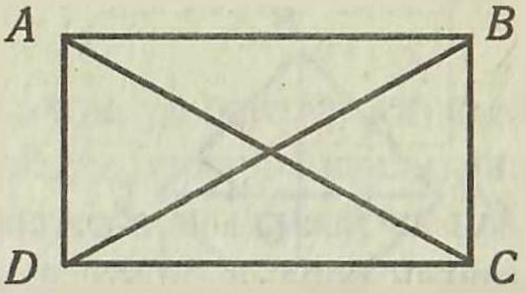
Исбатлау:
DBC һәм *ADC* өчпочмакларын тикшерәбез. Аларда:
AD = *BC* — параллелограммның капма-каршы яклары,
DC — уртак як,
$\angle D = \angle C$ — турыпочмаклыкның барлык почмаклары да туры.
Нәтиҗә: өчпочмаклар беренче билге буенча тигез. Ә тигез өчпочмакларда барлык элементлар да тиңдәшле рәвештә тигез була, шуңлыктан, *AC* һәм *BD* яклары да тигез. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Бирелгән параллелограммның турыпочмаклыкмы, түгелме икәнен ничек белергә мөмкин? Билгеләмә буенча, почмакларын үлчәргә мөмкин. Әгәр почмаклары 90° лы булса — бу турыпочмаклык. Булмаса — бу

гади параллелограмм. Тик почмакларны һәрвакытта да үлчәп булмаска мөмкин. Шуңа күрә, турыпочмаклык билгесе дип аталучы кире теоремадан файдаланалар.

Турыпочмаклык билгесе

Теорема 15.2. ***Диагональләре тигез булган параллелограмм турыпочмаклык була.***



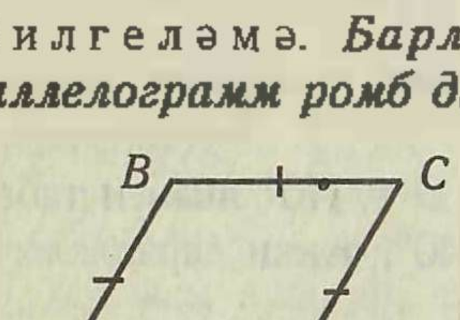
Бирелгән:
ABCD — параллелограмм,
AC = *BD*.
Исбатларга:
ABCD — турыпочмаклык.
Исбатлау:
ADC һәм *BDC* өчпочмакларын тикшерәбез. Аларда:
AD = *BC* — параллелограммның капма-каршы яклары,
DC — уртак як.
AC = *BD* — шарт буенча.

Нәтиҗә: өчпочмаклар өченче билге буенча тигез булалар. Тигез өчпочмакларда барлык элементлар пар-пар тигез була, шунлыктан, $\angle D = \angle C$. Ләкин бу почмаклар параллелограммның бер ягы янында ятучы почмаклар, шуңа күрә аларның суммасы 180° ка тигез. Алар тигез дә булганлыктан, һәрберсе 90° дигән сүз. Шулай ук *A* һәм *D* почмакларының суммасы да 180° ка тигез, ә $\angle D = 90°$, шунлыктан *A* почмагы 90° ка тигез булыр. Шул ук юл белән *B* почмагының да 90° икәнен беләбез. Шулай итеп, бу параллелограммның барлык почмаклары да 90°, димәк, ул — турыпочмаклык. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Бу теореманы тәрәзәләр, ишекләр эшләгәндә, аларның почмакларының турылыгын билгеләү өчен кулланалар. Аларның диагональләрен үлчиләр. Әгәр диагональләр тигез булса — бу турыпочмаклык, тигез булмаса — турыпочмаклык булмый.

Параллелограммнар арасында барлык яклары да тигез булганнары бар.

Билгеләмә. ***Барлык яклары да бертигез булган параллелограмм ромб дип атала.***

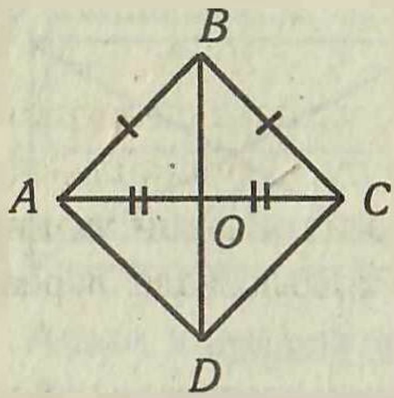


Бу — *ABCD* ромбы

Ромб — параллелограмм булганлыктан, ул параллелограммның барлык үзлекләренә ия. Ләкин ул гади параллелограмм гына булмыйча, барлык яклары да тигез булган параллелограмм булганлыктан, аның үзенә генә хас ике үзлеге дә бар.

Теорема 15.3. ***Ромбның диагональләре туры почмак ясап кисешәләр.***

Ромбның диагональләре почмакларының биссектрисалары булып торалар.



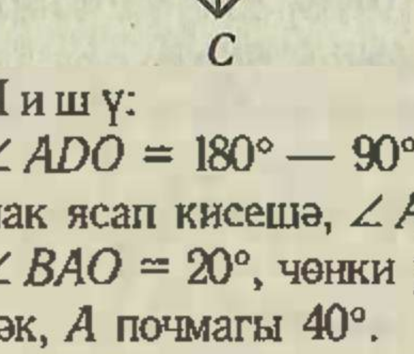
Бирелгән:
$ABCD$ — ромб,
AC һәм BD — диагональләр.
Исбатларга:
1) $AC \perp BD$,
2) BD — B почмагының биссектрисасы.

Исбатлау:

ABC өчпочмагы тигезьянлы, биредә $AB = BC$, чөнки ромбның барлык яклары да тигез. $AO = OC$, ягъни BO — медиана, чөнки ромб параллелограмм булганлыктан, аның диагональләре кисешү ноктасында урталай бүленә. Ә тигезьянлы өчпочмакта медиана бер үк вакытта биссектриса да, биеклек тә булып тора, димәк, $BD \perp AC$ һәм BD — B почмагының биссектрисасы. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мисал.

Диагонале ягы белән 20° лы почмак ясаган ромбның почмакларын табарга.



Бирелгән:
$ABCD$ — ромб,
$\angle OAD = 20°$.
Табарга:
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ ын.

Чишү:

$\angle ADO = 180° - 90° - 20°$, чөнки ромбның диагональләре туры почмак ясап кисешә, $\angle ADO = 70°$.

$\angle BAO = 20°$, чөнки ромбның диагонале биссектриса булып тора. Димәк, A почмагы 40°.

$\angle CDO = 70°$, шулай ук фикерләп, $\angle D = 140°$ икәнен табабыз.

$\angle C = \angle A = 40°$ һәм $\angle B = \angle D = 140°$, чөнки параллелограммның капма-каршы почмаклары тигез була.

Җавап: 40°, 140°, 40°, 140°.

Параллелограммнар арасында барлык почмаклары да туры һәм барлык яклары да тигез булганнары да бар.

Билгеләмә. ***Барлык почмаклары да туры һәм барлык яклары да тигез булган параллелограмм квадрат дип атала.***

ABCD квадраты

Квадрат — параллелограмм булганлыктан, ул параллелограммның барлык үзлекләренә дә ия. Аның почмаклары туры булганлыктан, ул — турыпочмаклыкның да барлык үзлекләренә ия. Шулай ук квадрат — ромб та булганлыктан, ул ромбның да барлык үзлекләренә ия. Квадратның үз үзлекләре юк.

Нәтиҗә ясыйбыз. Турыпочмаклык, ромб һәм квадрат — параллелограммның аерым очраклары. Алар параллелограммның барлык үзлекләренә ия булалар.

Турыпочмаклыкның тагын бер үзлеге бар — аның диагональләре тигез. Ромбның, параллелограммның биш үзлегеннән тыш, тагын ике үзлеге бар: аның диагональләре туры почмак ясап кисешә һәм диагональләр почмакларның биссектрисалары булып тора.

Квадрат, параллелограммның биш үзлегеннән тыш, ромбның һәм турыпочмаклыкның үзлекләренә ия.

Турыпочмаклыкның 6, ромбның 7, квадратның 8 үзлеге бар.

Фалес теоремасы

Теорема 15.4. ***Почмакның бер ягында тигез кисемтәләр салып, аларның очлары аша почмакның икенче ягын кисеп үтәрлек итеп параллель турылар үткәрсәк, почмакның икенче ягында да үзара тигез кисемтәләр барлыкка килер.***

Бирелгән:

O почмагы, $AB = BC$,

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$.

Исбатларга:

$A_1B_1 = B_1C_1$.

Исбатлау:

B_1 ноктасы аша, AC га параллель итеп, A_2C_2 турысын үткәрик. $A_1B_1A_2$ һәм $B_1C_1C_2$ өчпочмакларын тикшерик. Аларда:

$B_1A_2 = B_1C_2$, чөнки ABB_1A_2 — параллелограмм һәм аның капма-каршы яклары тигез: $B_1A_2 = AB$, BCC_1B_1 — шулай ук параллелограмм һәм анда $B_1C_2 = BC$. Ләкин шарт буенча $AB = BC$ һәм шунлыктан $A_2B_1 = B_1C_2$.

$\angle A_1B_1A_2 = \angle C_1B_2C_2$ — вертикаль почмаклар,

$\angle A_1A_2B_1 = \angle C_1C_2B_1$ — AA_1 һәм CC_1 параллель турылары белән A_2C_2 кисүчесе янындагы аркылы ятучы почмаклар.

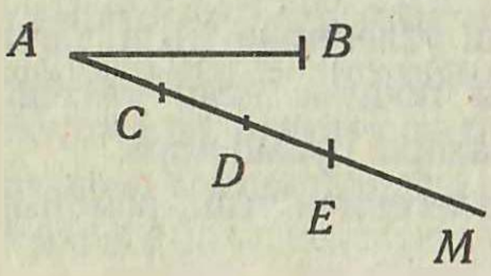
Нәтиҗә: өчпочмаклар икенче билге буенча тигез. Ә тигез өчпочмакларда барлык элементлар да пар-пар тигез була, димәк, A_1B_1 һәм B_1C_1 яклары тигез. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Җиденче класста сез кисемтәне урталай бүләргә өйрәндегез. Ә ничек итеп аны 3 яки 7 кисәккә бүләргә? Бу мәсьәләне Фалес теоремасы ярдәмендә чишәргә мөмкин.

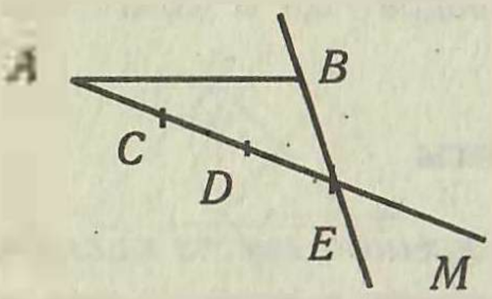
Мәсьәлә. Кисемтәне 3 өлешкә бүләргә.

Төзү:

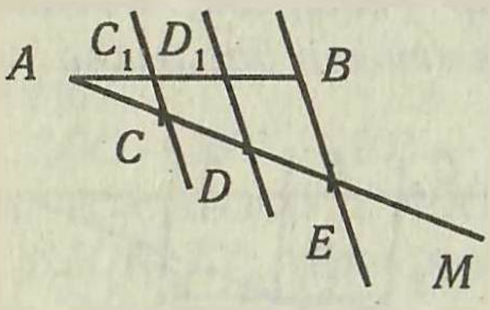
1. Ирекле AM нурын төзибез.



2. Бу нурда, A ноктасыннан башлап, ирекле озынлыктагы өч тигез кисемтә салабыз: $AC = CD = DE$.



3. B һәм E нокталарын тоташтырабыз.

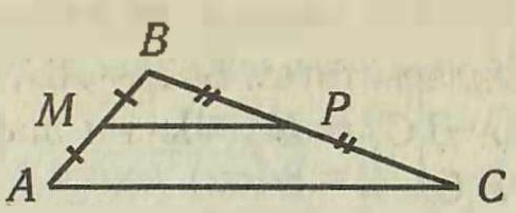


4. C һәм D нокталары аша, BE га параллель итеп, CC_1 һәм DD_1 турыларын үткәрәбез.

Фалес теоремасы буенча AC кисемтәсендә үзара тигез булган $AC_1 = C_1D_1 = D_1B$ кисемтәләре барлыкка килергә тиеш.

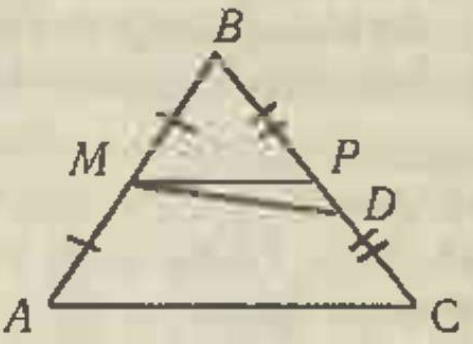
Билгеләмә. *Өчпочмакның ике ягының урталарын тоташтыручы кисемтә өчпочмакның урта сызыгы дип атала.*

M — AB ның уртасы,
P — BO ның уртасы,
MP — өчпочмакның
урта сызыгы



Теорема 15.5. ***Өчпочмакның урта сызыгы аның өченче ягына параллель һәм аның яртысына тигез.***

Бирелгән:
ABC — өчпочмак,
M — AB ягының уртасы,
P — BC ның уртасы.

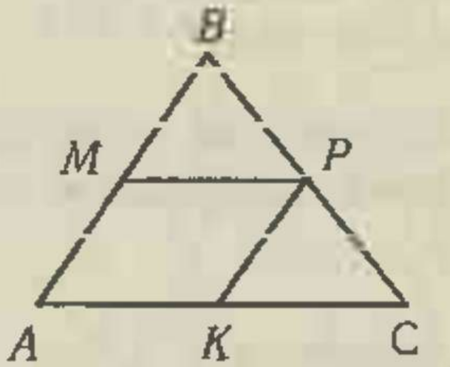


Исбатларга:
1) $MP \parallel AC$,
2) $MP = \frac{1}{2} AC$.

Исбатлау:

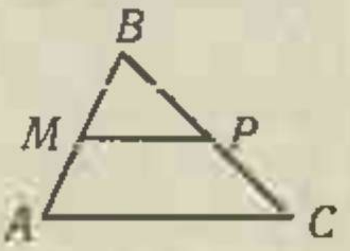
1) Без *MP* ның *AC* га параллельме, түгелме икәнен белмибез, шунлыктан үзебез *AC* га параллель *MD* турысын үткәрәбез. Фалес теоремасын кулланыйк. *AB* ягында ике тигез *AM = BM* кисемтәләре бар, чөнки *M — AB* ягының уртасы. *AC* һәм *MD* параллель турылары үткәрелде, димәк, *BC* ягында да үзара тигез кисемтәләр барлыкка килер. Димәк, *D — BC* ягының уртасы, ләкин безнең икенче урта *P* ноктасында иде. Шулай булгач, *P* ноктасы *D* ноктасы белән тәңгәл килә һәм *MP AC* га параллель була. Шуны исбатларга кирәк иде дә. Беренче расламаны исбатладык.

2) Икенче урта сызык — *PK*ны үткәрик. Алдагы исбатлау буенча *PK BA* га параллель. Шулай булгач, *AMPK* дүртпочмагы — параллелограмм, ә параллелограммның капма-каршы яклары тигез, *MP = AK*, *PK* — урта сызык, димәк, *AK = CK* һәм ул вакытта $MP = \frac{1}{2} AC$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.



Мисал.

ABC өчпочмагында *AB* һәм *BC* яклары урталарыннан *MP* урта сызыгы үткәрелгән. *BM* = 3 см, *BP* = 6 см, *MP* = 4 см. *ABC* өчпочмагының периметрын табарга.



Чишү:

$AB = 3 \cdot 2 = 6$ (см), чөнки M ноктасы AB ның уртасында ята.

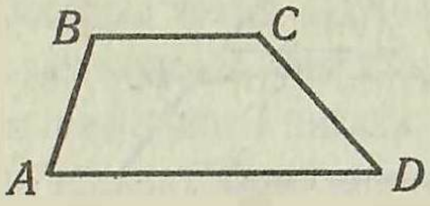
$BC = 6 \cdot 2 = 12$ (см).

$AC = 4 \cdot 2 = 8$ (см), чөнки MP урта сызыгы AC ягыннан ике тапкыр кимрәк.

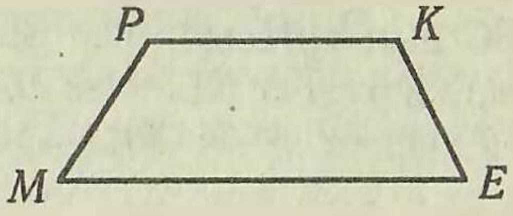
$P = 6 + 12 + 8 = 26$ (см).

Җавап: 26 см.

Билгеләмә. *Капма-каршы ике ягы параллель, ә икесе параллель булмаган дүртпочмак трапеция дип атала.*

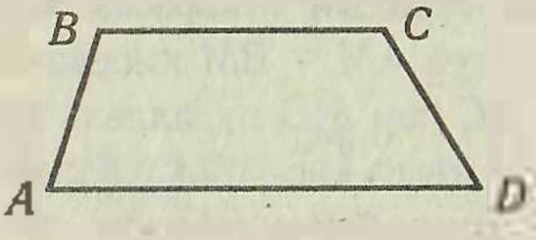


ABCD трапециясе



MPKE трапециясе

Параллель яклар **нигезләр** дип атала.

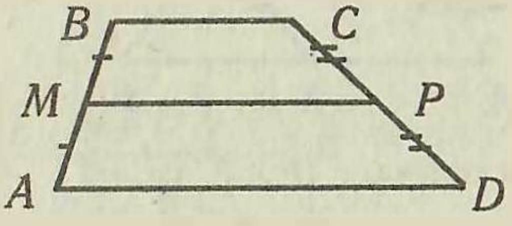


ABCD трапециясендә
AD һәм *BC* — нигезләр

Ян яклары тигез булган трапеция **тигезьянлы трапеция** дип атала.

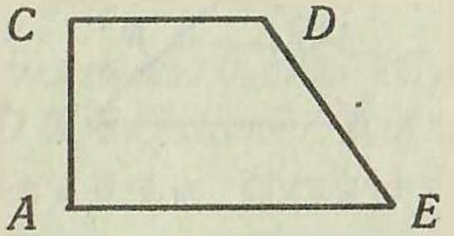
ABCD трапециясе — тигезьянлы.
Биредә $AB = CD$.

Трапециянең ян якларының урталарын тоташтыручы кисемтә **трапециянең урта сызыгы** дип атала.



ABCD трапециясендә
M — *AB* ның уртасы,
P — *CD* ның уртасы,
MP — урта сызык.

Туры почмагы булган трапеция **турыпочмаклы трапеция** дип атала.



Турыпочмаклы *ACDE* трапециясе

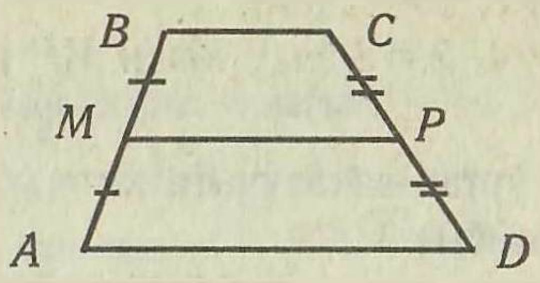
Теорема 15.6. ***Трапециянең урта сызыгы нигезләренә параллель һәм аларның ярымсуммасына тигез.***

Бирелгән:

ABCD — трапеция,

M — *AB* ның уртасы,

P — *CD* ның уртасы.



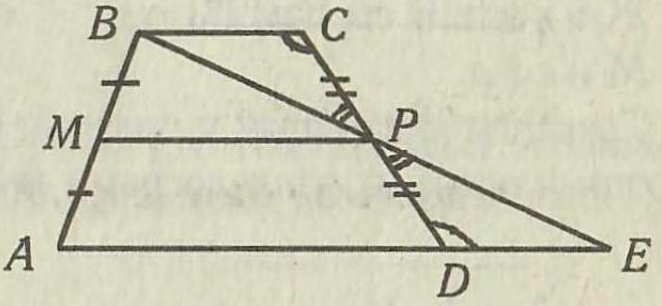
Исбатларга:

1) $MP \parallel AD \parallel BC$,

2) $MP = \frac{AD+BC}{2}$.

Исбатлау:

B түбәсе һәм *P* ноктасы аша туры үткәрик. Ул *AD* ягын *E* ноктасында кисеп үтә. *BCP* һәм *DEP* өчпочмакларын тикшерик. Аларда: $CP = PD$, чөнки *P* — *CD* ның уртысы.



$\angle BPC = \angle DPE$, чөнки алар вертикаль почмаклар, $\angle C = \angle PDE$, *BC* һәм *AE* параллель турылары янындагы аркылы ятучы почмаклар.

Нәтиҗә: өчпочмаклар икенче билге буенча тигез. Ә тигез өчпочмакларда барлык элементлар да пар-пар тигез була, шулай булгач, $BP = PE$. Димәк, *P* ноктасы *BE* ның уртасында ята һәм шуңа күрә *MP* — *ABE* өчпочмагының урта сызыгы һәм алдагы теорема буенча:

1) $MP \parallel AE$ — шуны исбатларга кирәк иде дә.

2) $MP = \frac{1}{2} AE$, ләкин *AE* ике өлештән тора — *AD* һәм *DE* өлешләреннән, димәк, $MP = \frac{AD+DE}{2}$.

Без *BCP* һәм *PDE* өчпочмакларының тигезлеген исбатладык, моннан $DE = BC$. *DE* ны *BC* белән алыштырып, $MP = \frac{AD+BC}{2}$ икәнен табабыз. Шуны исбатларга кирәк иде..

Мисал.

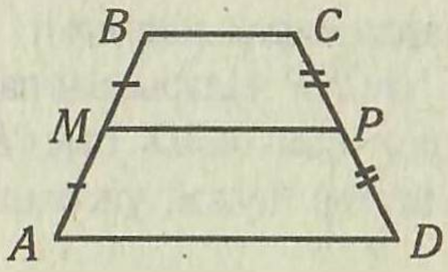
Трапециянең өске нигезе аскысыннан 5 тапкырга кечерәк, ә урта сызыгы 18 см га тигез. Трапециянең нигезләрен табарга.

Бирелгән:

ABCD — трапеция.

BC *AD* дан 5 тапкырга кечерәк.

MP — урта сызык,



Табарга:

BC һәм *AD* ны.

Ч и ш ү:

Кечерәк (өске) нигезнең озынлыгы x см булсын, ул вакытта аскы нигезнең озынлыгы $5x$ см булыр. 15.5 теоремасы буенча тигезләмә төзибез:

$$\frac{x+5x}{2} = 18.$$

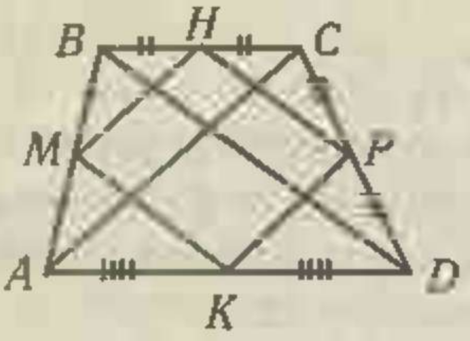
Аны уртак ваклаучыга китерәбез, тигезләмәнең ике ягын да 2 гә тапкырлыйбыз.

$$x + 5x = 36,$$
$$6x = 36,$$
$$x = 6.$$
$$6 \cdot 5 = 30 \text{ (аскы нигезе).}$$

Җ а в а п: 6 см һәм 30 см.

М и с а л.

Трапеция якларының урталарын бер-бер артлы тоташтырып табылган дүртпочмакның параллелограмм икәнлеген исбатларга.



Б и р е л г ә н:
$ABCD$ — трапеция,
M, H, P һәм K — трапеция якларының урталары.
И с б а т л а р г а:
$MHPK$ — параллелограмм.

И с б а т л а у:

$MHPK$ дүртпочмагының параллелограмм икәнлеген исбатлау өчен, бу дүртпочмакның капма-каршы якларының параллель булуын исбатларга кирәк. AC диагонален үткәрик.

ABC өчпочмагында MH — урта сызык һәм урта сызык турындагы теорема буенча ул AC га параллель, $MH \parallel AC$.

ADC өчпочмагында PK — урта сызык һәм шушы ук теорема нигезендә ул AC га параллель, $PK \parallel AC$.

MH һәм PK параллель турыларының өченче AC турысына параллель булуы ачыкланды. Димәк, бу ике туры үзара параллель. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

AK һәм HP якларының параллельлеген исбатлау өчен BD диагонален үткәрергә һәм ABD һәм BDC өчпочмакларын тикшерергә кирәк. Фикерләүләр шулай ук башкарыла.

15 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Турыпочмаклык нәрсә ул?
2. 15.1 теоремасын исбатларга.
3. 15.2 теоремасы ничек әйтелә?
4. Турыпочмаклыкның барлык үзлекләрен санагыз.
5. Ромб нәрсә ул?
6. 15.3 теоремасын исбатлагыз.
7. Ромбның барлык үзлекләрен санагыз.
8. Квадрат нәрсә ул?
9. Квадратның барлык үзлекләрен санагыз.
10. 15.4 теоремасы ничек укыла?
11. Кисемтәне ничек итеп тигез кисәкләргә бүләргә?
12. Нинди кисемтәне өчпочмакның урта сызыгы дип атыйлар?
13. 15.5 теоремасын исбатларга.
14. 15.6 теоремасы ничек укыла?
15. Трапеция нәрсә ул?

"4" ле өчен өстәмә рәвештә 15.2 һәм 15.6 теоремаларын исбатларга.

"5" ле өчен өстәмә рәвештә 15.4 теоремасын исбатларга.

15 нче контроль эш

1. Турыпочмаклыкның бер ягы икенчесеннән 2 см га зуррак, ә аның периметры 44 см га тигез. Турыпочмаклыкның барлык якларын табыгыз.

2. O ноктасы — $ABCD$ ромбы диагональләренең кисешү ноктасы, AOB почмагы 52° ка тигез. Ромбның почмакларын табыгыз.

3. Трапециянең нигезләре 5 : 11 чагыштырмасында, ә аның урта сызыгы 40 см га тигез. Трапеция нигезләренең озынлыкларын табыгыз.

§ 16. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫ

7 нче сыйныф геометриясеннән түбәндәгеләр билгеле:

Билгеләмә. *Турыпочмаклы өчпочмакның туры почмакка каршы ятучы ягы гипотенуза дип атала.*

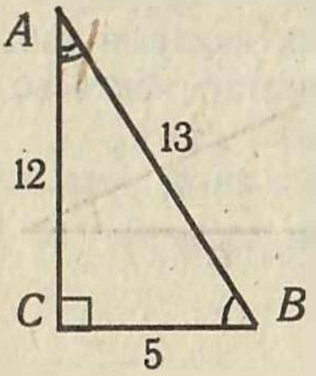
Билгеләмә. *Турыпочмаклы өчпочмакның туры почмакны төзүче яклары катетлар дип атала.*

Билгеләмә. *Турыпочмаклы өчпочмакның кысынкы почмагының косинусы дип янында ятучы катетының гипотенузага чагыштырмасын атыйлар.*

Почмакның косинусы $\cos A$, $\cos B$, $\cos\alpha$ дип билгеләнә. A почмагының косинусы, B почмагының косинусы, альфа почмагының косинусы дип укыла.

Мисал.

ABC өчпочмагында C почмагы $90°$, $AB = 13$ см, $AC = 12$ см, $BC = 5$ см. $\cos A$ һәм $\cos B$ ны табарга.



Чишү:

A почмагы янында AC катеты ята, AB — гипотенуза.

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}.$$

B почмагы янында BC катеты ята, AB — гипотенуза.

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}.$$

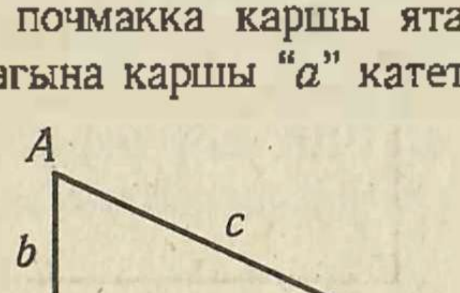
Җавап: $\cos A = \frac{12}{13}$, $\cos B = \frac{5}{13}$

Кагыйдә: *Почмакның косинусын табу өчен:*

1. *Бу почмак янында ятучы катетны, гипотенузаны табарга һәм аларны үлчәргә кирәк.*

2. *Катет озынлыгын гипотенуза озынлыгына бүләргә кирәк.*

Туры почмакны C хәрефе белән билгеләргә килешкәннәр. Гипотенуза туры почмакка каршы ята. Аны "c" хәрефе белән билгелибез. A почмагына каршы "a" катеты, B почмагына каршы "b" катеты ята.



A почмагы янында b катеты ята: $\cos A = \frac{b}{c}$.

B почмагы ягында a катеты ята: $\cos B = \frac{a}{c}$.

Почмакның косинусы почмакның зурлыгына гына бәйле. Шуңа күрә барлык почмакларның да зурлыклары исәпләнгән һәм аларның кыйммәтләре Брадис таблицасында тупланган.

М и с а л.

Таблицалар буенча cos 20°, cos 60°, cos 42° ны табарга.

Ч и ш ү.

52, 53 һәм 54 нче битләрдә уң якта аста А баганасында градуслар күрсәтелгән. Янында җавап урнашкан.

Җ а в а п: cos 20° = 0,9397, cos 60° = 0,5000, cos 42° = 0,7431.

Таблицалар ярдәмендә кире мәсьәләне дә чишәргә мөмкин.

М и с а л.

Косинусы 0,2250 гә тигез булган почмакны табарга.

Ч и ш ү.

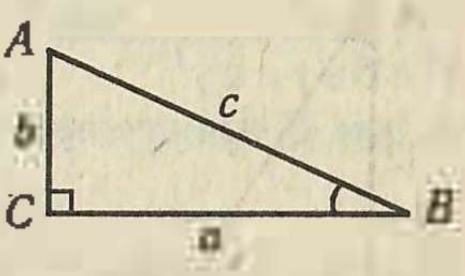
Таблицаларның 52 нче битендәге бик күп саннар арасыннан 0,2250 не эзлибез. Аннан уңдарак җавап урнашкан. Ул 77°.

М и с а л.

ABC өчпочмагында C — туры почмак, AB = 10 см, $\cos A = 0{,}3$. AC ны табарга.

Ч и ш ү:

Сызымны төзеп, аны тамгалап куябыз.



$\cos A = \frac{b}{c}$, бу тигезлеккә $\cos A$ урынына 0,3 не, c урынына 10 ны куябыз. Тигезләмә таптык:

$$0{,}3 = \frac{b}{10}.$$

Уртак ваклаучыга китерәбез:

$$^{10\backslash}0{,}3 = \frac{b}{10}^{1/},$$

$$3 = b.$$

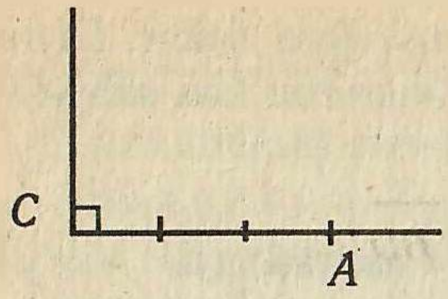
Җ а в а п: AC = 3 см.

М и с а л.

Косинусы $\frac{3}{4}$ кә тигез булган почмак төзергә. (Косинус $\frac{3}{4}$ кә тигез дигән сүз янда яткан катеты 3 өлеш, ә гипотенузасы 4 өлеш икәнне аңлата).

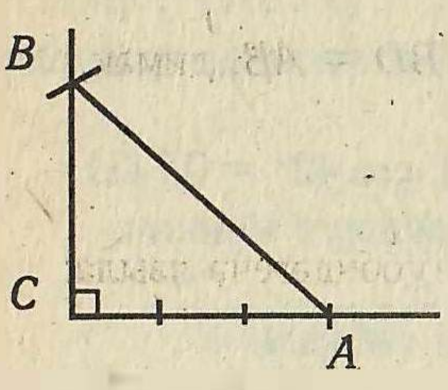
Т ө з ү:

1. C туры почмагын төзибез.



2. Анын бер ягында кисемтә төзибез: $AC = 3$ см.

3. A ноктасыннан, циркульне 4 см га ачып, почмакның икенче ягына билге ясыйбыз. B ноктасын таптык.



4. A һәм B нокталарын тоташтырабыз.

A почмагының косинусы $\frac{3}{4}$ кә тигез, чөнки янда ятучы катет $AC = = 3$ см, ә гипотенуза $AB = 4$ см.

Пифагор теоремасы

Теорема 16.1. ***Турыпочмаклы өчпочмакта гипотенузаның квадраты катетларның квадратлары суммасына тигез.***

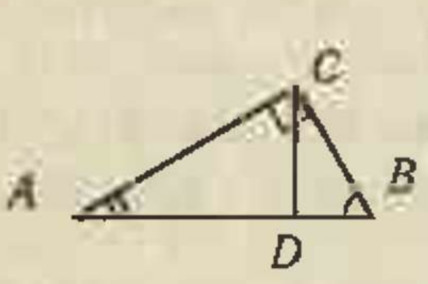
Бирелгән:
$\triangle ABC$, $\angle C = 90°$.
Исбатларга:
$AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Исбатлау:
A һәм B почмакларының косинусларын табабыз:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \cos B = \frac{BC}{AB}.$$

C туры почмагы түбәсеннән CD биеклеген үткәрәбез. Турыпочмаклы ACD һәм BCD өчпочмакларын табабыз. BCD өчпочмагында $\cos B$ ны табабыз:

$$\cos B = \frac{BD}{BC}.$$



ACD өчпочмагында $\cos A$ ны табабыз:

$$\cos A = \frac{AD}{AC}.$$

Табылган косинусларны тигезлибез:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \text{ һәм } \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}.$$

Пропорциядә кырый буыннар тапкырчыгышы урта буыннар тапкырчыгышына тигез:

$$AC^2 = AB \cdot AD,$$
$$BC^2 = AB \cdot BD.$$

Тигезлекләрне кушабыз:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} AC^2 = AB \cdot AD \\ BC^2 = AB \cdot BD \end{array} \\ \hline AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD \end{array}$$

AB ны җәя тышына чыгарабыз:

$AC^2 + BC^2 = AB(AD + BD)$, ләкин $AD + BD = AB$, димәк,

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Шуны исбатларга кирәк иде.

Безнең билгеләүләрдә Пифагор теоремасы түбәндәгечә языла:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Мисал.

Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары 7 см га һәм 10 см га тигез. Гипотенузаны табарга.

(Алда әйткәнебезчә, гипотенузаны «c», катетларны «a» һәм «b» хәрефләре белән билгеләрбез).

Бирелгән:
$a = 7$ см,
$b = 10$ см.
Табарга:
c ны.

Чишү:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$49 + 100 = c^2.$$

$c = \sqrt{149}$ һәм $c = -\sqrt{149}$.

Озынлык тискәре сан була алмаганлыктан, икенче җавап канәгатьләндерми.

Җавап: $\sqrt{149}$ см.

Мисал.

Турыпочмаклы өчпочмакта катет 12 см, ә гипотенуза 20 см га тигез. Икенче катетны табарга.

Бирелгән:
$a = 12$ см,
$c = 20$ см.
Табарга:
b ны.
Чишү:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$144 + b^2 = 400,$$

$$b^2 = 400 - 144.$$

$b = \sqrt{256}$ һәм $b \neq -\sqrt{256}$ (мәсьәләнең шартына туры килми).

Җавап: 16 см.

Кагыйдә: Мәсьәләләрне Пифагор теоремасын кулланып чишү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1. *Турыпочмаклы өчпочмак төзергә һәм аның өчен Пифагор теоремасын язарга.*

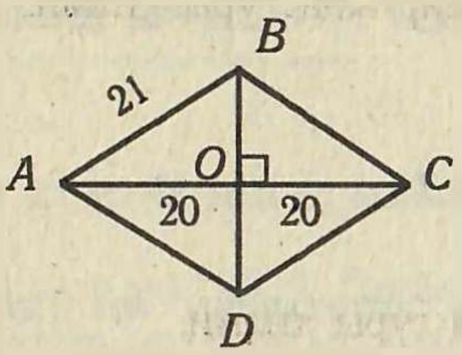
2. *Аңа бирелгән саннарны язарга.*

3. *Табылган тигезләмәне чишәргә.*

4. *Җавапны язарга.*

Мисал.

Ромбның бер диагонале 40 см, ә ягы 21 см га тигез. Ромбның икенче диагоналең табарга.



Бирелгән:
$ABCD$ - ромб,
$AC = 40$ см,
$AB = 21$ см.
Табарга:
BD ны.

Чишү:

(Турыпочмаклы өчпочмак эзлибез. Ромбның диагональләре үзара перпендикуляр булганлыктан, AOB өчпочмагы турыпочмаклы була. Аның өчен Пифагор теоремасын язабыз).

$$AB^2 = AO^2 + BO^2.$$

(Ромбның диагональләре кисешү ноктасында урталай бүленәләр, $AO = 20$ см).

$441 = 400 + BO^2$,

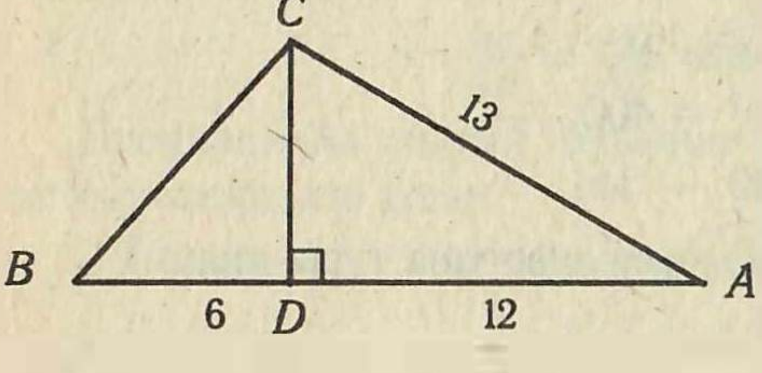
$BO^2 = 41$.

$BO = \sqrt{41}$ һәм $BO = -\sqrt{41}$ — мәсьәләнең шартына туры килми.
(BD диагонале BO дан ике тапкыр зуррак.)

Җавап: $BD = 2 \cdot \sqrt{41}$ см.

Мисал.

ABC өчпочмагында биеклек AB ягын $AD = 12$ см һәм $BD = 6$ см булган ике кисәккә бүлә. $AC = 13$ см, BC ны табарга.



Бирелгән:
ΔABC, CD — биеклек,
$AC = 13$ см,
$AD = 12$ см,
$BD = 6$ см.
Табарга:
CB ны.

Ч и ш ү:

ABC өчпочмагы турыпочмаклы түгел һәм аңа карата Пифагор теоремасын кулланып булмый. *CD* — биеклек булганлыктан, *ADC* — турыпочмаклы өчпочмак. Аңа карата Пифагор теоремасын язабыз.

$AC^2 = AD^2 + CD^2$, бирелгәннәрне урыннарына куеп, тигезләмәне чишәбез.

$169 = 144 + CD^2$,

$CD^2 = 25$.

$CD = 5$ һәм $CD = -5$ — мәсьәләнең шартына туры килми.

BCD өчпочмагы турыпочмаклы.

$CB^2 = CD^2 + BD^2$.

$CB^2 = 25 + 36$,

$CB^2 = 61$,

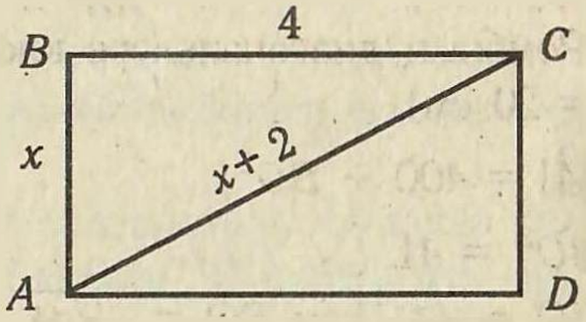
$CB = \sqrt{61}$ һәм $CB = -\sqrt{61}$ — шартка туры килми.

Җ а в а п: $CB = \sqrt{61}$ см.

М и с а л.

Турыпочмаклыкның ягы диагоналеннән 2 см га кыскарак, ә икенче ягы 4 см га тигез. Диагональнең озынлыгын табарга.

Б и р е л г ә н:
ABCD —турыпочмаклык,
AB *AC* дан 2 см га кечерәк,
$BC = 4$ см.
Т а б а р г а:
AC ны.



Ч и ш ү:

AB ягының озынлыгын x см дип билгеләсәк, *AC* ның озынлыгы $(x + 2)$ см булыр. *ABC* өчпочмагы өчен Пифагор теоремасын язабыз.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

$$(x + 2)^2 = x^2 + 16,$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 16,$$

$$x^2 + 4x - x^2 = 16 - 4,$$

$$4x = 12,$$

$$x = 3.$$

$$AC = 3 + 2 = 5.$$

Җ а в а п: $AC = 5$ см.

16 НЧЫ ЗАЧЕТ

1. Катет нәрсә ул?
2. Гипотенуза нәрсә ул?
3. Почмакның косинусы нәрсә ул?
4. Почмакның косинусын табу кагыйдәсен искә төшерегез.
5. 16.1 теоремасын исбатлагыз.
6. Пифагор теоремасын кулланып, мәсьәләләр чишү кагыйдәсе.

16 нчы контроль эш

1. Турыпочмаклыкның диагонале 15 см, ә бер ягы 6 см. Турыпочмаклыкның икенче ягын табыгыз.

2.Тигезьянлы өчпочмакның нигезе 10 см, ә нигезгә үткәрелгән биеклек 6 см га тигез. Ян ягының озынлыгын табыгыз.

3. Ромбның диагональләре 20 см һәм 10 см. Ромбның озынлыгын табыгыз.

§ 17. ТУРЫПОЧМАКЛЫ ӨЧПОЧМАКЛАРНЫ ЧИШҮ

Б и л г е л ә м ә. *Турыпочмаклы өчпочмакта кысынкы почмакның синусы дип каршы ятучы катетның гипотенузага чагыштырмасын атыйлар.*

Синусның билгеләнеше мондый: $\sin A$, $\sin B$, $\sin \alpha$.

Укылышы: A почмагының синусы, B почмагының синусы, синус альфа.

М и с а л.

ABC өчпочмагында *C* почмагы 90°, $AB = 13$ см, $AC = 12$ см һәм $BC = 5$ см. $\sin A$ һәм $\sin B$ ны табарга.

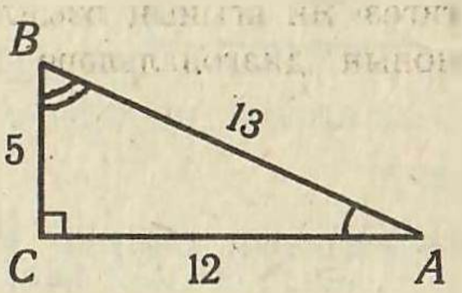
Ч и ш ү:

A почмагына *BC* катеты каршы ята, *AB* — гипотенуза.

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}.$$

B почмагына *AC* катеты каршы ята, *AB* — гипотенуза.

$$\sin A = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}.$$



Җ а в а п: $\sin A = \frac{5}{13}$, $\sin B = \frac{12}{13}$.

Кагыйдә: *Почмакның синусын табу өчен:*

1. *Бу почмакка каршы ятучы катетны табарга, гипотенузаны табарга һәм аларны үлчәргә кирәк.*

2. *Катет озынлыгын гипотенуза озынлыгына бүләргә кирәк.*

Безнең билгеләүләрдә *A* почмагына каршы "*a*" катеты ята, димәк,

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

B почмагына каршы "*b*" катеты ята, димәк,

$$\sin B = \frac{b}{c}.$$

Почмакларның синуслары бары тик почмакның зурлыгына гына бәйле. Шуңа күрә синусларның кыйммәтләре исәпләнгән һәм Брадис таблицаларына тупланган.

М и с а л.

Таблицалар буенча sin 30°, sin 50°, sin 66° ны табарга.

Ч и ш ү.

Таблицаларның 52, 53 һәм 54 нче битләрендә сул яктагы "A" баганасында градуслар язылган. Янәшәдә җавап күрсәтелгән.

Җ а в а п: sin 30° = 0,5000, sin 50° = 0,7660, sin 66° = 0,9135.

М и с а л.

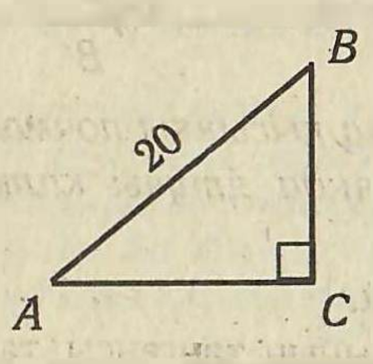
Таблицалар буенча синусы 0,9659 га тигез булган почмакны табарга.

Ч и ш ү.

54 нче биттәге таблицадагы саннар арасыннан 0,9659 санын эзләп табабыз. Янәшәсендә ж а в а п: 75°.

М и с а л.

ABC өчпочмагында *C* почмагы — туры почмак, *AB* = 20 см, $\sin A = 0{,}7$, *BC* ны табарга.



Б и р е л г ә н:
$\triangle ABC$, $\angle C = 90°$.
AB = 20 см, $\sin A = 0{,}7$.
Т а б а р г а:
BC ны.

Ч и ш ү:

A почмагының синусы $\sin A = \frac{BC}{AB}$ икәнен искә төшерәбез. Бу тигезлектә sin *A* урынына 0,7 не, *AB* урынына 20 не куябыз. Тигезләмә табылды:

$$\frac{7}{10} = \frac{BC}{20}.$$

Уртак ваклаучыга китерәбез һәм *BC* = 14 не табабыз.

Ж а в а п: *BC* = 14 см.

М и с а л.

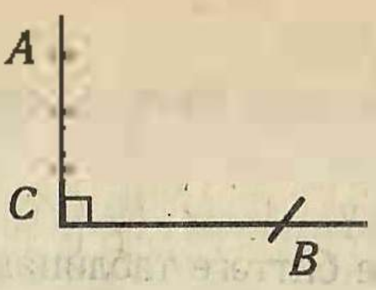
Синусы 0,6 га тигез булган почмак төзергә.

Т ө з ү:

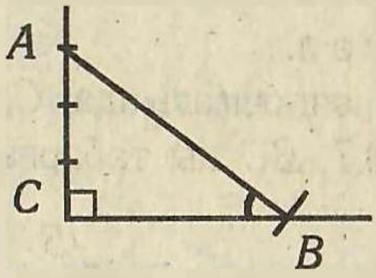
1. *C* туры почмагын төзибез.

2. $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Синус — ул каршы ятучы катетның гипотенузага чагыштырмасы, димәк, катет 3 өлештән, ә гипотенуза 5 өлештән тора. Почмакның бер ягына *AC* = 3 см лы кисемтә салабыз.

3. Циркульне 5 см га ачып, бер очын A ноктасына куябыз (үзәк) һәм почмакның икенче ягында B ноктасын билгелибез.



4. A һәм B нокталарын тоташтырабыз. B почмагына каршы ятучы катет 3 см, ә гипотенуза 5 см га тигез, димәк, аның синусы $\frac{3}{5}$ кә тигез.



Җ а в а п: B почмагы.

Б и л г е л ә м ә. *Турыпочмаклы өчпочмакта кысынкы почмакның тангенсы дип каршы ятучы катетның янда ятучы катетка чагыштырмасын атыйлар.*

Тангенс болай билгеләнә: tg A, tg B, tg α.

Укыла: A почмагының тангенсы, B почмагының тангенсы, тангенс альфа.

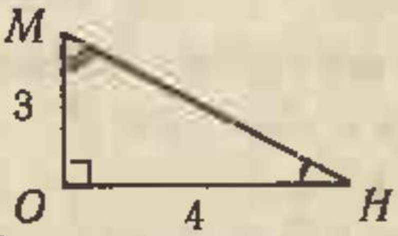
М и с а л.

Өчпочмакның якларын үлчәргә һәм tg M һәм tg H ны табарга.

Ч и ш ү:

OM һәм OH катетларын үлчибез. OM = 3 см һәм OH = 4 см.

$\operatorname{tg} M = \frac{OH}{OM} = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg} H = \frac{OM}{OH} = \frac{3}{4}$.



Моннан соң $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$ дип билгеләрбез.

М и с а л.

Турыпочмаклы өчпочмакта катет 12 см, ә гипотенуза 13 см. Өчпочмакның кысынкы почмакларының тангенсларын табарга.

Б и р е л г ә н:

a = 12 см, c = 13 см.

Т а б а р г а:

tg A, tg B ны.

Ч и ш ү:

(Тангенсларны табу өчен ике катетның да озынлыгын белергә кирәк. Икенче катетны Пифагор теоремасы буенча табабыз.)

$a^2 + b^2 = c^2$,

$144 + b^2 = 169$,

$b^2 = 25$.

$b = 5$ һәм $b = -5$ — мәсьәләнең шартына туры килми.

Җ а в а п: $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{12}{5}$, $\operatorname{tg} B = \frac{b}{a} = \frac{5}{12}$.

Мисал.

Таблицалар буенча tg 20°, tg 45°, tg 80° ны табарга.

Чишү.

Таблицаларның 55, 56 һәм 58 битләрендә сул яктагы "А" баганасында градусларны табабыз. Янәшәдә җавабы.

Җавап: tg 20° = 0,3640, tg 45° = 1,000, tg 80° = 5,6.

Мисал.

Таблицалар буенча тангенсы 1,6003 кә тигез булган почмакны табарга.

Чишү.

Таблицадагы саннар арасыннан 1,6003 санын эзләп табабыз. Янәшәдә җавабы урнашкан — ул 58°.

Мисал.

Турыпочмаклы өчпочмакта бер катет 20 см га, ә аңа каршы ятучы почмакның тангенсы 0,4 кә тигез. Икенче катетны табарга.

(Катетны "a" дип, ә аңа каршы ятучы почмакны "A" дип билгелик).

Бирелгән:

$a = 20$ см,

$\operatorname{tg} A = 0{,}4$.

Табарга:

b ны.

Чишү:

$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$ — бу тигезлектә tg A урынына 0,4 санын, a урынына 20 санын куеп, $0{,}4 = \frac{20}{b}$ тигезләмәсен табабыз. Уртак ваклаучыга китерәбез: $0{,}4\,b = 20$, $b = 20 : 0{,}4 = 200 : 4$, $b = 50$.

Җавап: $b = 50$ см.

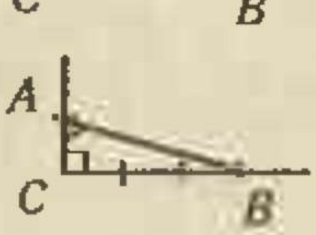
Мисал.

Тангенсы 3 кә тигез булган почмак төзергә.

Төзү:

1. Туры C почмагын төзибез.

2. $3 = \frac{3}{1}$, димәк, каршы ятучы катетның озынлыгы 3 өлешкә, ә янда ятучы катетның озынлыгы 1 өлешкә тигез. Туры почмакның якларында 1 см лы һәм 3 см лы кисемтәләр салабыз. A һәм B нокталарын таптык.



3. Аларны тоташтырабыз. Тангенсы 3 кә тигез булган A почмагы килеп чыкты.

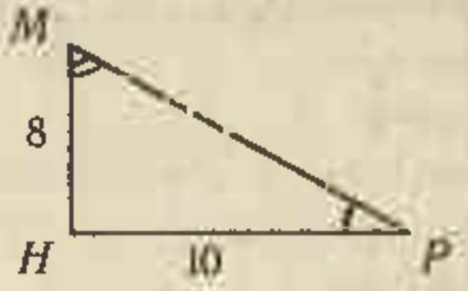
Б и л г е л ə м ə. *Турыпочмаклы өчпочмакта кысынкы почмакның котангенсы дип янда ятучы катетның каршында ятучы катетка чагыштырмасын атыйлар.*

Котангенс түбəндəгечə билгелəнə: ctg A, ctg B, ctg γ.

Укыла: A почмагының котангенсы, B почмагының котангенсы, котангенс гамма.

Без ctg $A = \frac{b}{a}$, ctg $B = \frac{a}{b}$ дип билгелəрбез.

М и с а л.



Турыпочмаклы MHP өчпочмагында H — туры почмак, $MH = 8$ см, $HP = 10$ см.

Т а б а р г а:

ctg M һəм ctg P ны.

Ч и ш ү:

$$\text{ctg}\, M = \frac{MH}{PH} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

$$\text{ctg}\, P = \frac{PH}{MH} = \frac{10}{8} = 1,25.$$

Җ а в а п: ctg $M = 0{,}8$, ctg $P = 1{,}25$.

М и с а л.

Турыпочмаклы өчпочмакта бер катет 30 см га, ə каршы ятучы почмакның котангенсы 0,1 гə тигез. Икенче катетны табарга.

(Катетны «a» дип, каршы ятучы почмакны «A» дип билгелибез).

Б и р е л г ə н:

$a = 30$ см,

ctg $A = 0{,}1$.

Т а б а р г а:

b ны.

Ч и ш ү:

ctg $A = \frac{b}{a}$. ctg A урынына 0,1 санын, a урынына 30 санын куябыз. Тигезлəмəне таптык:

$$0,1 = \frac{b}{30}.$$

Уртак ваклаучыга китереп табабыз: $3 = b$.

Җ а в а п: $b = 3$ см.

М и с а л.

Таблицалар буенча ctg 45°, ctg 15°, ctg 70° ны табарга.

Ч и ш ү.

Таблицаларның 55, 56, 57 һəм 58 нче битлəрендə котангенслар аста, уң якта урнашканнар. «A» баганасында градуслар, ə янəшəдə аларның котангенслары урнашкан.

Җ а в а п: ctg 45° = 1, ctg 15° = 3,732, ctg 70° = 0,3640.

М и с а л.

Таблицалар буенча котангенсы 10,08 гә тигез булган почмакны табыгыз.

Ч и ш ү.

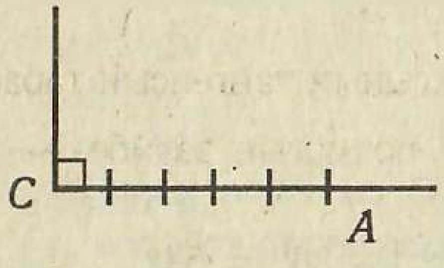
Котангенслар таблицаларындагы саннар арасыннан 10,08 санын табабыз. “А” баганасыннан сулдарак мисалның җавабы урнашкан: 5°40'.

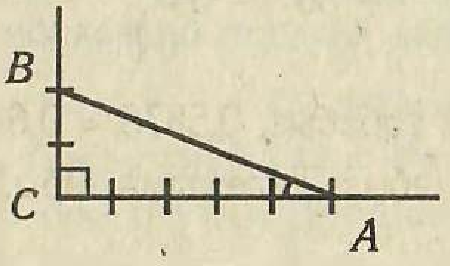
М и с а л.

Котангенсы 2,5 кә тигез булган почмак төзергә.

Т ө з ү:

1. Туры почмак C ны төзибез.





2. $2,5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$, димәк, янда ятучы катетның озынлыгы 5 өлеш, каршы ятучы катетның озынлыгы 2 өлешкә тигез. Туры почмакның якларында 5 см лы һәм 2 см лы кисемтәләр төзибез. A һәм B нокталары табылды. Аларны тоташтырабыз. Котангенсы 2,5 кә тигез булган A почмагы табылды.

Өчпочмакларны чишү

Б и л г е л ә м ә. *Өчпочмакны чишү — аның билгесез якларын һәм почмакларын табу дигән сүз.*

М и с а л.

Катетлары 7 см һәм 10 см булган турыпочмаклы өчпочмакны чишәргә.

Б и р е л г ә н:

$a = 7$ см,

$b = 10$ см.

Т а б а р г а:

c ны, $\angle A$, $\angle B$ ны.

Чишү:

Пифагор теоремасы буенча гипотенузаны табабыз:

$c^2 = a^2 + b^2$,

$c^2 = 49 + 100$,

$c^2 = 149$. $c = \sqrt{149} \approx 12$ һәм $c = -\sqrt{149}$ — мәсьәләнең шартына туры килми.

A почмагының синусын табабыз: $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{7}{12} \approx 0{,}58$.

Таблицалар буенча A почмагын табабыз: 36° (таблицаның 53 нче битендә 0,58 гә иң якын сан — 0,5878).

Өчпочмакның почмаклары суммасы 180°, бер почмагы 90°, икенчесе 36°.

B почмагын табабыз.

$\angle B = 180° - 90° - 36° = 54°$.

Җавап: $\sqrt{149}$ см, 36°, 54°.

Бу мисалны башка төрле юл белән дә чишәргә мөмкин.

Чишү:

Катетлар билгеле булганлыктан, A почмагының тангенсын табабыз.

$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{7}{10} = 0,7$. Таблицалардан A почмагын эзлибез — 36° икәне табыла.

B почмагын табабыз. $\angle B = 180° - 90° - 36° = 54°$.

Гипотенузаны исәплибез.

$\sin A = \frac{a}{c}$. Таблицалардан синус 36° ны табабыз, 0,5878 ≈ 0,6. Бу санны синус урынына, 7 не "a" урынына куябыз. Тигезләмә табылды:

$$0,6 = \frac{7}{c}.$$

$$c/\,0,6 = \frac{7}{c} \text{ (урта ваклаучыга китерәбез)},$$

$$0{,}6\,c = 7,$$

$$c = 7 : 0{,}6 = 70 : 6.$$

$$c = 11{,}6 \approx 12.$$

Җавапларлардагы аермалар якынча саннар белән эш итү нәтиҗәсендә барлыкка килә.

Шушы ук мисалны тагын берничә юл белән, мәсәлән, косинуслар яки котангенслар кулланып чишәргә мөмкин.

Өчпочмакларны чишүнең гомуми кагыйдәләре юк. Һәр мәсьәләдә бирелгән зурлыкларны карарга кирәк. Мәсәлән, ике як бирелгән очракта Пифагор теоремасы буенча өченче якны исәпләргә мөмкин. Синусның билгеләмәсе буенча бер почмакны табарга була. Икенче почмакны табу өчен 180° тан ике почмакны алырга мөмкин.

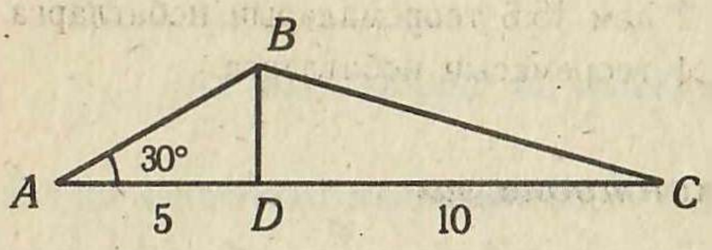
Әгәр инде мәсьәләдә бер почмак һәм бер як бирелгән булса, иң элек, алу гамәлен эшләп, икенче почмакны табарга була. Катет яки гипотенуза бирелгән булуга карап, синус яки тангенс билгеләмәсен кулланырга мөмкин.

Бу формулаларны исегездә тотыгыз:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{b}{c},$$
$$\cos A = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c},$$
$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \ \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}, \ \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}, \ \operatorname{ctg} B = \frac{a}{b}.$$

Катлаулырак мәсьәләне тикшереп карыйк.

ABC өчпочмагында *BD* биеклеге *AC* ягын 5 һәм 10 см лы кисәкләргә бүлә. *A* почмагы 30° булса, *BC* ны табыгыз.



Бирелгән:
$\triangle ABC$, *BD* — биеклек,
$AD = 5$ см,
$CD = 10$ см,
$\angle A = 30°$.
Табарга: *BC* ны.

Чишү:

ABC өчпочмагы турыпочмаклы түгел, шуңа күрә аның өчен Пифагор теоремасын да, синус, косинус, тангенс һәм котангенс билгеләмәләрен дә кулланып булмый. Ләкин *ABD* һәм *BCD* өчпочмаклары турыпочмаклы. Кайсын тикшерик икән? *ABD* өчпочмагында *AD* ягы һәм *A* почмагы, ә *BCD* өчпочмагында бер як кына билгеле, шунлыктан *ABD* өчпочмагыннан башларбыз. Нәрсәне кулланабыз? Әгәр синус яки косинус билгеләмәләрен куллансак, *AB* гипотенузасын табарбыз, тик ул *BCD* өчпочмагына керми. Тангенсны кулланырбыз. $\operatorname{tg} A = \frac{BD}{AD}$. Таблицалар буенча $\operatorname{tg} 30° = 0{,}5776$ икәнен табабыз. 0,6 га кадәр түгәрәклибез. Тангенс урынына 0,6 санын, *AD* урынына 5 санын куябыз. Тигезләмә килеп чыга:

$$^5/0,6 = \frac{BD}{5} \quad \text{(Уртак ваклаучыга китерәбез).}$$
$$3 = BD.$$

CBD өчпочмагы өчен Пифагор теоремасын кулланабыз:

$BC^2 = BD^2 + CD^2$,

$BC^2 = 9 + 100$,

$BC^2 = 109$.

$BC = \sqrt{109}$ һәм $BC = -\sqrt{109}$ — мәсьәләнең шартына туры килми.

Җавап: $\sqrt{109}$ см.

17 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Почмакның синусы дип нәрсә атала?
2. Почмакның синусын табу кагыйдәсе.
3. Нәрсә ул почмакның тангенсы?
4. Үзлегегездән почмакның тангенсын табу кагыйдәсен чыгарыгыз.
5. Нәрсә ул почмакның котангенсы?

17 нче контроль эш

1. Катетлары 5 һәм 8 см лы турыпочмаклы өчпочмакны чишегез.

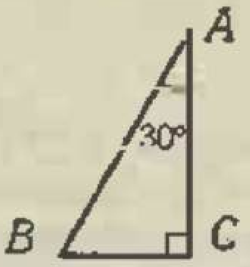
2. Гипотенузасы 20 см һәм бер почмагы 60° булган турыпочмаклы өчпочмакны чишегез.

3. Бер катеты 10 см һәм аның янындагы почмагы 10° булган турыпочмаклы өчпочмакны чишегез.

§ 18. ӨЧПОЧМАКЛАРНЫ ЧИШҮ

Кайбер почмакларның синусы, косинусы, тангенсы һәм котангенсы кыйммәтләре тамырасты аңлатмалары белән билгеләнәләр.

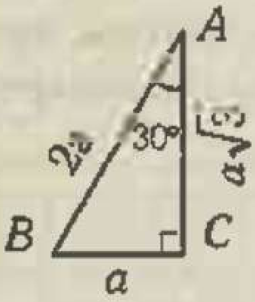
30° лы почмакның синус, косинус, тангенс һәм котангенсы кыйммәтләрен табу.



Бирелгән:
ΔABC — турыпочмаклы,
$\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$.
Табарга:
sin 30°, cos 30°, tg 30°, ctg 30° ны.

Чишү:

BC ягын a дип билгелик, ул вакытта, 11.4 теоремасы буенча, AB $2a$ га тигез була. AC ягын табабыз. Пифагор теоремасы буенча:



$AB^2 = BC^2 + AC^2$,
$(2a)^2 = a^2 + AC^2$,
$4a^2 - a^2 = AC^2$,
$AC^2 = 3a^2$,
$AC = a\sqrt{3}$.

Шулай итеп, өчпочмакның барлык яклары да a аша күрсәтелде.

Синус — каршы ятучы катетның гипотенузага чагыштырмасы ул:

$$\sin A = \sin 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Косинус — янда ятучы катетның гипотенузага чагыштырмасы:

$$\cos A = \cos 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тангенс — каршы ятучы катетның янда ятучы катетка чагыштырмасы:

$$\text{tg } A = \text{tg } 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

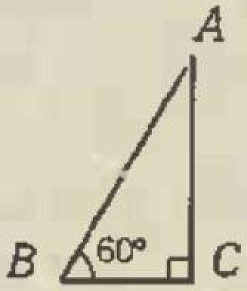
Котангенс — янда ятучы катетның каршы ятучы катетка чагыштырмасы:

$$\text{ctg } A = \text{ctg } 30° = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

Шулай итеп,

$\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{ctg } 30° = \sqrt{3}$.

60° лы почмакның синус, косинус, тангенс һәм котангенсын табу.

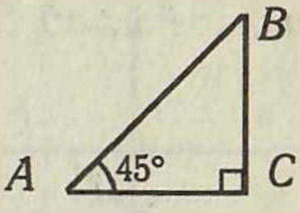


Бирелгән:
ΔABC — турыпочмаклы,
$\angle B = 60°$.
Табарга:
sin 60°, cos 60°, tg 60°, ctg 60°.

Бу мәсьәләнең чишелеше алдагы мәсьәләнекенә бик охшаган, шунлыктан аны үзлегегездән эшләгез.

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$, $\text{ctg } 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

45° лы почмакның синус, косинус, тангенс һәм котангенсын табу.



Бирелгән:

$\triangle ABC$ — турыпочмаклы, $\angle A = 45°$.

Табарга:

$\sin 45°$, $\cos 45°$, $\text{tg } 45°$, $\text{ctg } 45°$.

Бу мәсьәләнең чишелеше алдагы ике мәсьәләнең чишелешенә охшаган. Аны үзлегегездән эшләгез.

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{tg } 45° = 1$, $\text{ctg } 45° = 1$.

30°, 45°, 60° лы почмакларның синусы, косинусы, тангенсы һәм котангенсларының кыйммәтләре таблицасы

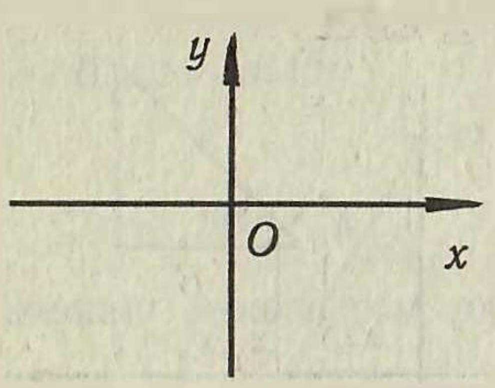
Почмак	sin	cos	tg	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

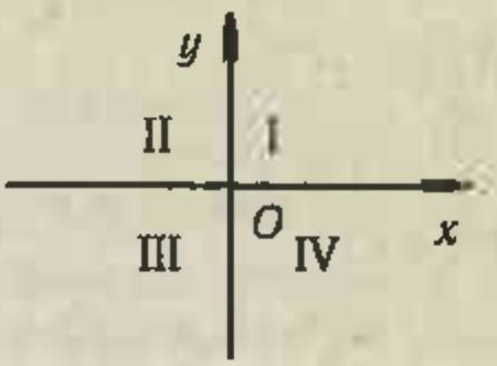
18 НЧЕ ЗАЧЕТ *(телдән контроль эш)*

1. 30° лы почмакның синусын, косинусын, тангенсын һәм котангенсын табу.
2. 45° лы почмакның синусын, косинусын, тангенсын һәм котангенсын табу.
3. 60° лы почмакның синусын, косинусын, тангенсын һәм котангенсын табу.

§ 19. ЯССЫЛЫКТА КООРДИНАТАЛАР

Яссылыкта үзара перпендикуляр x һәм y турыларын үткәрик. Болар — координаталар күчәрләре.

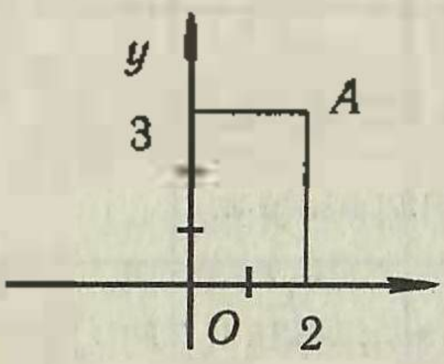




O ноктасы *координаталар башлангычы* дип атала.
x күчәре — *абциссалар күчәре*,
y күчәре — *ординаталар күчәре* дип атала.

Координаталар күчәрләре яссылыкны 4 чиреккә бүлә.

Яссылыкта теләсә нинди *A* ноктасын алып, аннардан күчәрләргә перпендикуляр төшерик. Перпендикулярларның очларына күчәрләрдә саннар туры килә. Бу саннар *A* ноктасының *координаталары* дип атала.

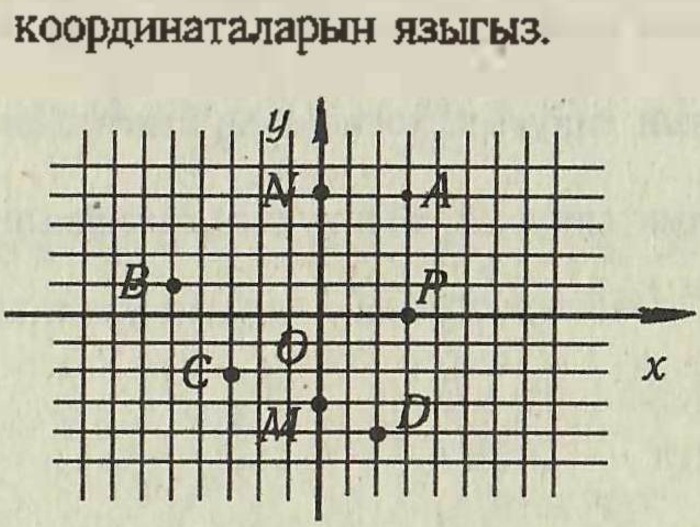


2 — *A* ноктасының абциссасы.
3 — *A* ноктасының ординатасы.

Бу саннарны җәяләр эчендә, беренче урынга абциссасын, икенче урынга ординатасын куеп язалар, мәсәлән, *A* (2; 3). "*A* ноктасының координаталары 2 һәм 3 кә тигез" дип укыла.

М и с а л.

Нокталарның координаталарын языгыз.



Җ а в а п: *A* (3; 4), *N* (0; 4), *B* (- 5; 1), *C* (- 3; - 2),
M (0; - 3), *D* (2; - 4), *P* (3; 0).

Кисемтә уртасының координаталары

Т е о р е м а 19.1. ***Кисемтә уртасының координаталары исемдәш координаталарның ярымсуммасына тигез.***

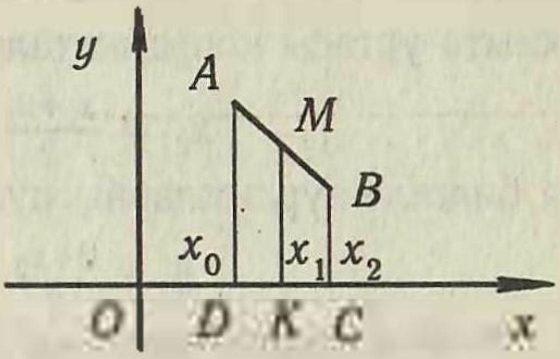
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Б и р е л г ә н:

$A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$.

M — AB ның уртасы.

И с б а т л а р г а:



$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

И с б а т л а у:

ABCD — трапеция, *M* — *AB* ның уртасы, *MK AD* га параллель һәм Фалес теоремасы буенча *K DC* ның уртасы.

$DK = CK$, ләкин $DK = x_0 - x_1$, ә $CK = x_2 - x_0$, димәк, $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$.

x_0 не сул якка, ә x_2 не уң якка күчерәбез.

$$x_0 + x_0 = x_2 + x_1,$$

$$2x_0 = x_2 - x_1,$$

$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ — шуны исбатларга кирәк иде дә.

$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ формуласы шулай ук исбатлана.

М и с а л.

Очлары *A* (5; 8) һәм *B* (-4; 10) нокталарында булган кисемтә уртасының координаталарын табарга.

Б и р е л г ә н:

A (5; 8),

B (— 4; 10).

Т а б а р г а:

x_0, y_0 не.

Ч и ш ү:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

$$x_0 = \frac{5-4}{2}, \quad y_0 = \frac{8+10}{2}.$$

$$x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = 9.$$

Җ а в а п: $(\frac{1}{2}; 9)$.

М и с а л.

AB кисемтәсенең очы *A*(2; — 2) һәм уртасы *M* (5; 6) координаталары билгеле. *B* ноктасының координаталарын табарга.

Бирелгән:
$A(2; -2)$, M — AB ның уртасы,
$M(5; 6)$.
Табарга:
B ноктасының координаталарын.
Чишү:
Кисемтә уртасы координаталарының формулаларын язабыз.

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Аларга билгеле зурлыкларны куябыз:

$$5 = \frac{2+x_2}{2}, \quad 6 = \frac{-2+y_2}{2}.$$

Бу тигезләмәләрне чишәбез:

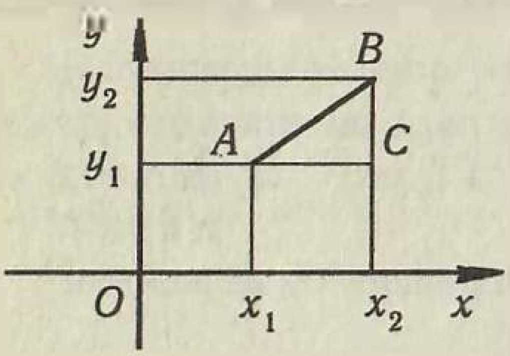
$10 = 2 + x_2$,	$12 = -2 + y_2$,
$10 - 2 = x_2$,	$12 + 2 = y_2$,
$x_2 = 8$.	$y_2 = 14$.

Җавап: $B(8;14)$.

Нокталар арасындагы ераклык

Теорема 19.2. ***Ике нокта арасындагы ераклык исемдәш координаталар аермаларының квадратлары суммасыннан квадрат тамырга тигез:***

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Бирелгән:
$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.
Исбатларга:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Исбатлау:
$\triangle ABC$ — турыпочмаклы өчпочмак. Пифагор теоремасы буенча:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

ләкин

$$AC = x_2 - x_1 \text{ һәм } BC = y_2 - y_1,$$

шуңа күрә

$$d^2 = AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Моннан

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, шуны исбатларга кирәк иде.

Мисал.

A (3; 8) һәм B (— 5; 6) нокталары арасындагы ераклыкны табарга.

Бирелгән:

A (3; 8),

B (— 5; 6).

Табарга:

AB ны.

Чишү:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$d = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (6 - 8)^2},$$

$$d = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}.$$

Җавап: $\sqrt{68}$.

Сызык тигезләмәсе

Билгеләмә. *Ике билгесезле тигезләмә яссылыктагы сызык тигезләмәсе дип атала.*

Нокта бу сызыкта ятса, аның координаталары тигезләмәнең чишелеше була, әгәр нокта бу сызыктан читтә ятса, аның координаталары тигезләмәнең чишелешләре була алмый.

Мисал.

$x + y + 5 = 0$ — бу ниндидер сызыкның тигезләмәсе.

A (0; —5), B (1; —4), C (5; 2), D (—2; —3) нокталары бу сызыкта яталармы?

Чишү:

Нокталарның координаталарын сызык тигезләмәсенә куеп тикшерәбез:

A (0; —5), $x = 0$, $y = -5$, $0 - 5 + 5 = 0$ — дөрес. A ноктасы сызыкта ята.

B (1; —4), $x = 1$, $y = -4$, $1 - 4 + 5 = 2 \neq 0$ — дөрес түгел. B ноктасы сызыкта ятмый.

C (5; 2), $x = 5$, $y = 2$, $5 + 2 + 5 = 12 \neq 0$ — дөрес түгел. C ноктасы сызыкта ятмый.

D (— 2; — 3), $x = -2$, $y = -3$, $-2 - 3 + 5 = 0$ — дөрес. D ноктасы сызыкта ята.

Туры тигезләмәсе

Теләсә нинди туры $ax + by + c = 0$ тигезләмәсе белән билгеләнә, биредә a, b һәм c — ирекле саннар.

Мәсәлән, $2x + 3y = 5$ — туры тигезләмәсе.

$y = 3x + 1, y = 5x, y = 2, x = 7, x + y = 0$ дә туры тигезләмәләренә мисаллар.

Туры тигезләмәсендә үзгәрешлеләр һәрвакыт беренче дәрәҗәдә булалар.

$A(x_1; y_1)$ һәм $B(x_2; y_2)$ нокталары аша узучы турының тигезләмәсе $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ рәвешен ала.

Мисал.

$A(5; 2)$ һәм $B(-3; 0)$ нокталары аша үтүче турының тигезләмәсен төзегез.

Чишү:

$A(5; 2)$: $x_1 = 5$, $y_1 = 2$, $B(-3; 0)$: $x_2 = -3$, $y_2 = 0$.

Туры тигезләмәсе:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad \frac{x-5}{-3-5} = \frac{y-2}{0-2}$$

Уртак ваклаучыга китерәбез:

$$^{1\backslash}\frac{x-5}{-8} = {}^{4\backslash}\frac{y-2}{-2}.$$

$$x - 5 = 4y - 8,$$

$$x - 4y - 5 + 8 = 0.$$

Җавап: $x - 4y + 3 = 0$.

Яссылыкта туриларның торышы

Яссылыкта турының формуласы түбәндәгечә билгеләнә:

$$ax + by + c = 0.$$

1. a, b һәм c — саннар. Әгәр алар барысы берьюлы нульгә тигез булмаса, бу ниндидер турыны аңлата. Аны ике ноктасы буенча төзергә мөмкин.

2. $c = 0$ булганда, тигезләмә $ax + by = 0$ рәвешен ала. y ны табабыз: $by = -ax$, $y = \frac{a}{b}x$. $x = 0$ булса, y та 0 гә тигез, димәк, туры координаталар башлангычы аша үтә.

3. $b = 0$ булганда, тигезләмә $ax + c = 0$ рәвешен ала. x ны табабыз: $ax + c = 0$, $ax = -c$, $x = \frac{c}{a}y$.

y теләсә нинди сан булганда да, x — даими сан. Бу — y лар күчәренә параллель туры була.

4. Әгәр $a = 0$ булса, тигезләмә $by + c = 0$ рәвешен ала. Бу — x лар күчәренә параллель туры.

5. Әгәр $a = 0$ һәм $c = 0$ булса, $by = 0$, $y = 0$. Бу — x лар күчәре.

6. Әгәр $b = 0$ һәм $c = 0$ булса, $ax = 0$, $x = 0$. Бу — y лар күчәре.

7. $a = b = c = 0$ булса, чишелешләре юк.

Нәтиҗәләр ясыйк:

1. $c = 0$ булганда, туры координаталар башлангычы аша үтә.
2. $a = 0$ булганда, туры x лар күчәренә параллель.
3. $b = 0$ булганда, туры y лар күчәренә параллель.
4. $a = c = 0$ булганда, бу x лар күчәре була.

Мисал.

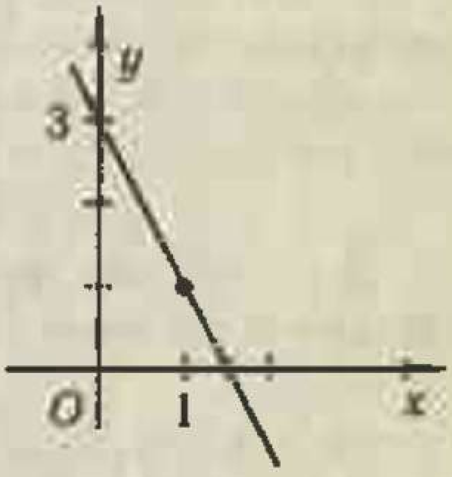
$2x + y - 3 = 0$ турысын төзергә.

Чишү:

y ны табабыз: $2x + y - 3 = 0$, $y = -2x + 3$.

Таблица төзибез: x ка теләсә нинди кыйммәтләр бирәбез, ә y ны $y = -2x + 3$ формуласы буенча исәплибез:

x	0	1
y	3	1



Күчәрләр сызабыз, (0; 3) һәм (1; 1) нокталарын төзибез. Аларны тоташтырабыз. $2x + y - 3 = 0$ турысы килеп чыкты.

Мисал.

$2x + 3y - 8 = 0$ һәм $3x + y = -2$ турыларының кисешү ноктасы координаталарын табарга.

Чишү:

Тигезләмәләр системасын чишәбез:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 8 = 0, \\ 3x + y = -2. \end{cases}$$

Икенче тигезләмәдән y ны табабыз:

$$3x + y = -2,$$
$$y = -2 - 3x,$$

һәм аны беренче тигезләмәгә куябыз:

$$2x + 3(-2 - 3x) - 8 = 0.$$

Бу тигезләмәне чишәбез:

$$2x - 6 - 9x - 8 = 0,$$
$$2x - 9x = 6 + 8,$$
$$-7x = 14,$$
$$x = 14 : (-7),$$
$$x = -2.$$

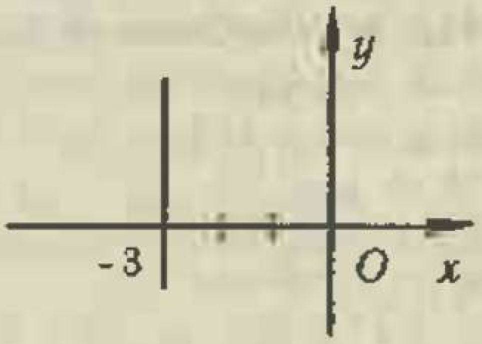
y ны исәплибез:

$$y = -2 - 3x,$$
$$y = -2 - 3 \cdot (-2),$$
$$y = -2 + 6,$$
$$y = 4.$$

Җ а в а п: $(-2; 4)$.

М и с а л.

$x + 3 = 0$ турысын төзергә.



Ч и ш ү:

Бу тигезләмәдә y юк, шунлыктан, туры y лар күчәренә параллель була.

$x = -3$.

Әйләнә тигезләмәсе

Радиусы R һәм үзәге M $(a; b)$ ноктасында булган әйләнәнең тигезләмәсе түбәндәгечә була:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

R радиуслы һәм үзәге координаталар башлангычында булган әйләнәнең тигезләмәсе $x^2 + y^2 = R^2$ формуласы белән аңлатыла.

М и с а л.

Үзәге координаталар башлангычында һәм радиусы 5 булган әйләнәнең тигезләмәсен төзергә.

Ч и ш ү:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

М и с а л.

Үзәге $M\,(5;\ 2)$ ноктасында һәм радиусы 10 булган әйләнәнең тигезләмәсен төзергә.

Ч и ш ү:

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 100.$$

М и с а л.

$x^2 + y^2 = 20$ әйләнәсе бирелгән. A (5; 1), B (4; 2) һәм C (1; —3) нокталарының әйләнәгә карата кайда урнашуларын билгеләргә.

Ч и ш ү:

Нокталар координаталарын тигезләмәгә куябыз:

A (5; 1), $x = 5$, $y = 1$, $25 + 1 = 26 > 20$. A ноктасы әйләнәнең тышында ята.

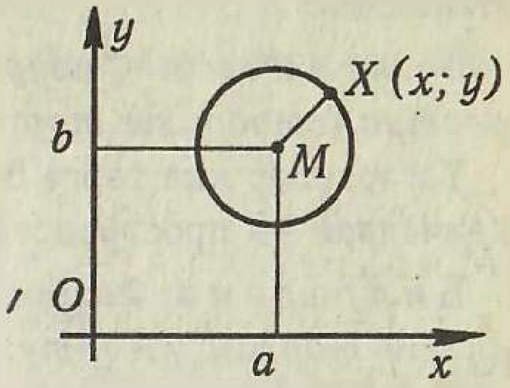
B (4; 2), $x = 4$, $y = 2$, $16 + 4 = 20 = 20$. B ноктасы әйләнәдә ята.

C (1; - 3), $x = 1$, $y = -3$, $1 + 9 = 10 < 20$. C ноктасы әйләнәнең эчендә ята.

Теорема 18.3. ***R радиуслы һәм үзәге M (a; b) ноктасында булган әйләнә $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ формуласы белән бирелә.***

Бирелгән:
$M(a; b)$ — әйләнәнең үзәге.
R — радиус.

Исбатларга:
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ — әйләнәнең тигезләмәсе.



Исбатлау:

Әйләнәдә координаталары $(x; y)$ булган теләсә нинди X ноктасын алыйк һәм нокталар арасындагы ераклыкны табу формуласы буенча MX ераклыгын табыйк:

$MX^2 = R^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$ — шуны исбатларга кирәк иде дә.

Нәтиҗә. Әгәр әйләнәнең үзәге координаталар башлангычында булса, әйләнә тигезләмәсе түбәндәгечә булыр: $x^2 + y^2 = R^2$.

19 НЧЫ ЗАЧЕТ

1. Координаталар күчәрләре ничек аталып йөртеләләр?
2. 19.1 һәм 19.2 теоремаларының әйтелешләре.
3. Турының тигезләмәсе нәрсә ул?
4. Туры һәм әйләнәнең тигезләмәләрен яза белергә.

"4" ле һәм "5" ле өчен өстәмә эш:

5. 19.1 теоремасын исбатларга.
6. 19.2 һәм 19.3 теоремаларын исбатларга.

19 нчы контроль эш

1. $2x - y + 6 = 0$ турысының координаталар күчәрләре белән кисешү нокталары координаталарын табарга.

2. $x^2 + y^2 = R^2$ әйләнәсе бирелгән.

а) әйләнәнең радиусын табарга.

б) аның үзәгенең координаталарын табарга.

в) A (5; 3), B (6;2) һәм C (10; —1) нокталарының әйләнәгә карата ничек урнашуларын ачыкларга.

г) AB озынлыгын табарга.

3. A (4; 1) һәм B(—2; 3) нокталары аша үтүче туры тигезләмәсен төзегез.

§ 20. ФИГУРАЛАРНЫ ҮЗГӘРТҮ

Безне төрле предметлар — әйберләр чолгап алган. Аларның формалары геометрик җисемнәрне хәтерләтә. Әйберләр яки аларның кисәкләре хәрәкәтләнәләр, икенче төрле әйткәндә, пространствода торышларын үзгәртәләр. Станокларда детальләрне эшкәртәләр, ягъни аларның формаларын үзгәртәләр. Шунлыктан, геометрик фигураларны үзгәртүләрне өйрәнү кирәклеге килеп чыга. Бу параграф шуны өйрәнүгә багышлана.

Билгеләмә. *Фигураны үзгәртү — аның формасын яки пространстводагы торышын үзгәртү ул.*

Үзгәртүләр ике төргә бүленә — беренчеләре әйбернең формасын, икенчеләре — пространстводагы торышын үзгәртәләр.

Билгеләмә. *Фигураның нокталары арасындагы ераклыкны саклый торган үзгәртүләр хәрәкәт дип атала.*

Хәрәкәт фигураның формасын үзгәртмичә генә аның пространстводагы торышын үзгәртә, бу әлеге билгеләмәдән килеп чыга. Ягъни, хәрәкәт — фигураны әйләндерә, бора, бер урыннан икенче урынга күчереп куя торган үзгәртү ул.

Хәрәкәткә мисаллар: китапны сумкага салу, тактаны бер урыннан икенчесенә күчереп кую, укучының класстан коридорга чыгуы.

Ә инде без икмәк кисәбез икән, бу үзгәртү хәрәкәт була алмый, чөнки икмәкнең формасы үзгәрә.

Хәрәкәт ике төрле була: параллель күчерү һәм бору.

Билгеләмә: *Фигураның барлык нокталарын да бер үк якка һәм бер үк ераклыкка күчерә торган хәрәкәт параллель күчерү дип атала.*

Параллель күчерүгә мисаллар: өстәлнең тартмасын тартып чыгару, поездның туры юл участогы буйлап хәрәкәт итүе, бораулау станогында бораның астан өскә йөрүе.

Беренче кагыйдә. *Параллель күчерү өчен түбәндәгеләрне башкарырга кирәк:*

а) *бирелгән якка таба фигураның барлык нокталарыннан параллель турылар үткәрергә,*

б) *бу турыларда бирелгән ераклыкны үлчәп салырга,*

в) *табылган нокталарны тоташтырырга.*

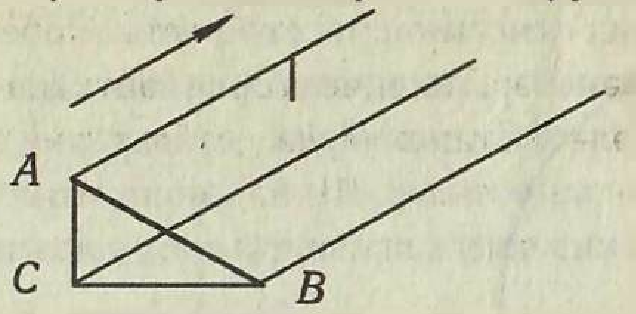
Мисал.

ABC өчпочмагын параллель күчерергә.

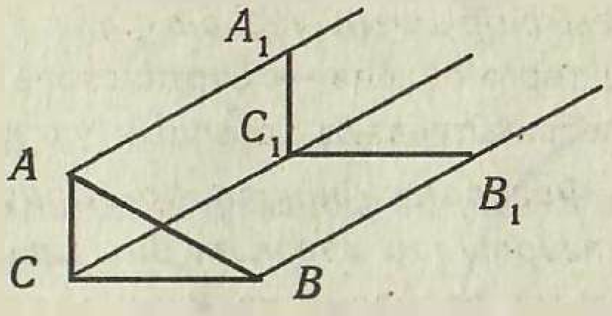
Параллель күчерүне башкарганчы, кайсы якка һәм нинди ераклыкка күчерергә икәнен ачыкларга кирәк. Параллель күчерүне

ук белән билгеләргә сүз куешыйк. Укның юнәлеше параллель күчерүнең юнәлешен, ә озынлыгы күчерү ераклыгын күрсәтә.

а) A, B һәм C түбәләреннән параллель турылар үткәрәбез:

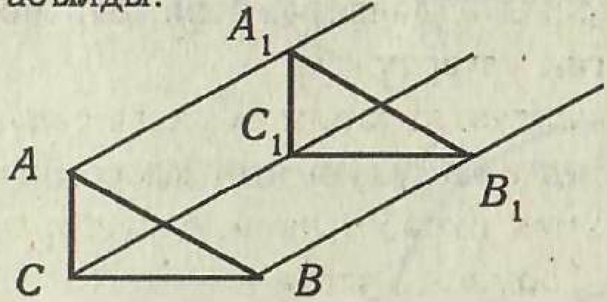


б) бу турыларда ук озынлыгындагы кисемтәләр үлчәп салабыз:



в) табылган нокталарны тоташтырабыз:

$A_1B_1C_1$ өчпочмагы табылды.



Билгеләмә. *Күчәрнең барлык нокталары хәрәкәтсез калып, калган барлык нокталары бер үк якка һәм бер үк почмакка күчкәндәге хәрәкәт күчәр тирәсендәге бору дип атала.*

Кагыйдә. *Боруны башкару өчен түбәндәгеләрне үтәргә кирәк:*

а) *үзәкләрен күчәрдә итеп алып, фигура нокталары аша әйләнәләр үткәрергә,*

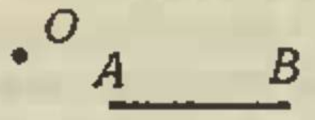
б) *фигура нокталарын бору үзәге белән тоташтырырга,*

в) *бирелгән якка бирелгән почмакка тигез итеп почмаклар төзергә, табылган нокталарны тоташтырырга.*

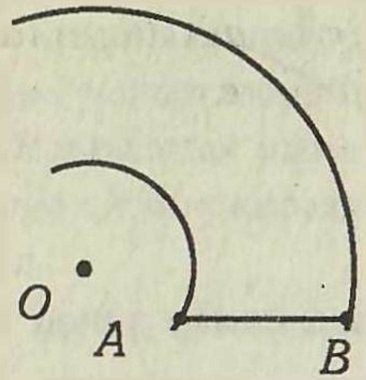
Мисал.

AB кисемтәсен *O* күчәре тирәсендә сәгать теленә каршы юнәлештә 120° ка борырга.

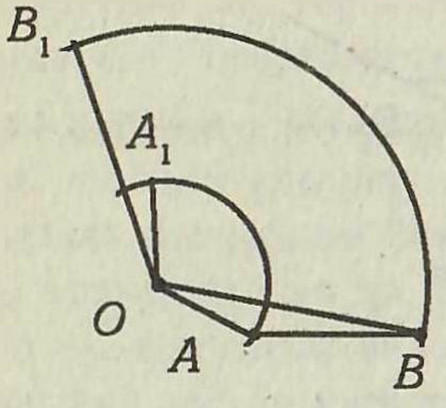
Бору өчен боруның юнәлешен (сәгать теле юнәлешендә яки каршы юнәлештә) һәм нинди почмакка борырга кирәк икәнен ачыклыйлар. Боруны ук белән, ә почмакның зурлыгын янәшәсенә язарга килешик. Мәсәлән, ↷40°. Бу язылыш сәгать теле юнәлешендә 40° ка борырга кирәк дигәнне аңлата. Бору үзәген *O* ноктасы белән билгеләрбез.



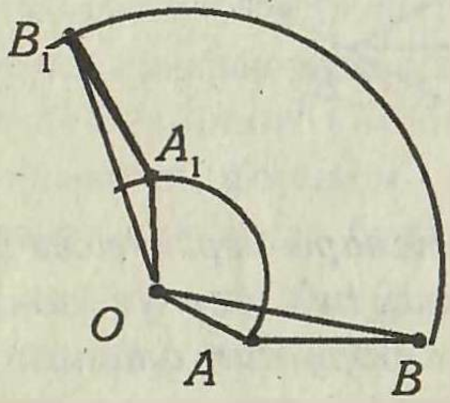
а) Үзәген O ноктасында алып, OA һәм OB радиуслы әйләнәләр сызабыз.



б) A һәм B нокталарын O ноктасы белән тоташтырабыз.



в) 120° лы почмаклар төзибез.



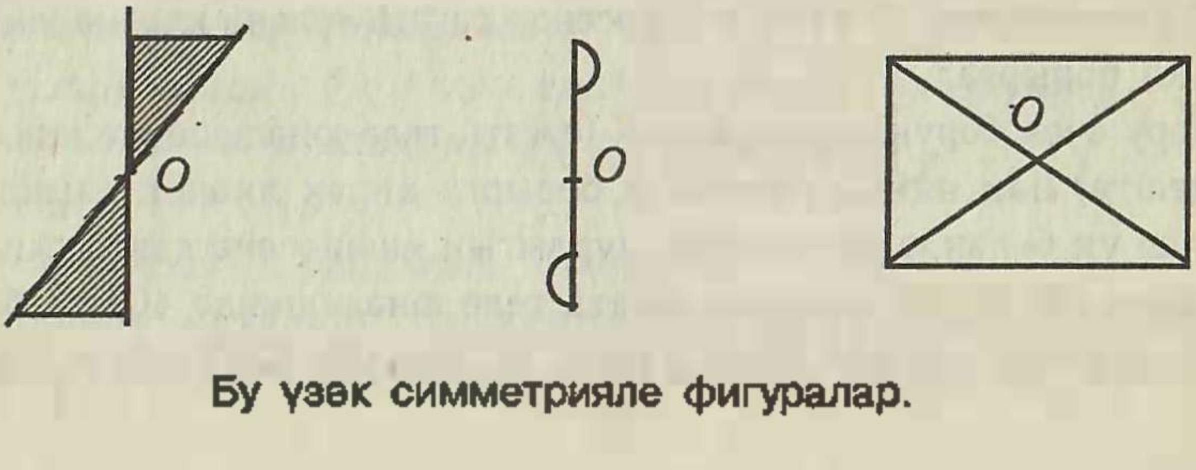
г) Табылган нокталарны тоташтырабыз.

A_1B_1 кисемтәсе табылды.

Б и л г е л ә м ә. *Фигура яссылыгында ятмаучы күчәр тирәсендә 180° ка бору үзәкле симметрия дип атала.*

Бу исем, өстән караганда күчәр яссылыкка кадалган кебек һәм ул нокта булып кына күренгәненә карап әйтелә.

Симметрия үзәкләре булган фигуралар үзәк *симметрияле фигуралар* дип атала.



Бу үзәк симметрияле фигуралар.

Үзәкле симметрияне почмакларны төземичә дә башкарырга мөмкин.

Кагыйдә. *Бирелгән ноктага үзәге O ноктасында булган үзәк симметрияле нокта төзү өчен түбәндәгеләр эшләнә:*

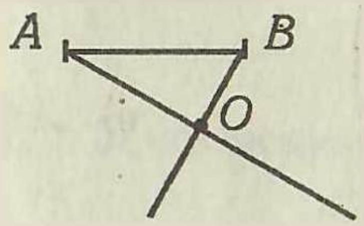
а) *бирелгән нокта белән O ноктасы тоташтырыла һәм бу туры үзәкнең икенче ягына да дәвам иттерелә,*

б) *турының дәвамында, O ноктасыннан башлап, бирелгән ноктадан O ноктасына кадәрге ераклык салына.*

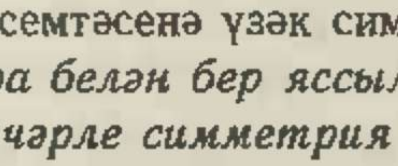
Мисал.

O үзәгенә карата *AB* кисемтәсенә үзәк симметрияле кисемтә төзергә.

а) *A* һәм *B* нокталарын *O* ноктасы белән тоташтырабыз һәм бу турыларны дәвам итәбез.



б) $OA_1 = OA$ һәм $OB_1 = OB$ кисемтәләрен төзибез.



в) A_1 һәм B_1 нокталарын тоташтырабыз.

A_1B_1 кисемтәсе *AB* кисемтәсенә үзәк симметрияле.

Билгеләмә. *Фигура белән бер яссылыкта ятучы күчәргә карата 180° ка бору күчәрле симметрия дип атала.*

Симметрия күчәре булган фигуралар *симметрияле* (симметрик) фигуралар дип атала. Яфраклар, күбәләкләр, детальләр, бизәкләр симметрияле фигуралар була.

Болар симметрияле фигуралар

Күчәрле симметриядә фигураның борылуы китап битләренең хәрәкәтен (ачылуын) хәтерләтә.

Кагыйдә. *Бирелгән ноктага а күчәренә карата симметрик нокта төзү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:*

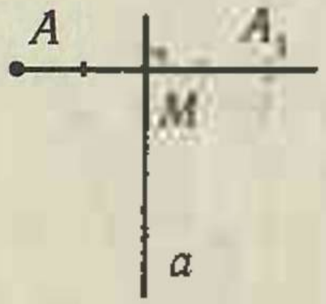
а) *бирелгән ноктадан күчәргә перпендикуляр үткәрергә һәм аны дәвам итәргә,*

б) *перпендикулярның дәвамында бирелгән ноктадан күчәргә кадәр озынлыкка тигез кисемтә төзергә.*

Мисал.

a күчәренә карата A ноктасына симметрик нокта төзергә.

а) A ноктасыннан a турысына AM перпендикулярын үткәрәбез һәм аны дәвам итәбез.



б) $A_1M = AM$ кисемтәсен төзибез. A_1 ноктасы A ноктасына симметрик.

Мисал.

Параллель күчерү вакытында A (3; 5) ноктасы A_1(6; 1) ноктасына күчте.

M (1;10) ноктасы нинди ноктага күчәр?

Чишү.

Параллель күчерү башкарганда A ноктасының абсциссасы 3 тән 6 га үзгәрде, димәк, нокта $6 - 3 = 3$ берәмлеккә уңга күчте. M_1 ноктасы абсциссасын табабыз:

$$1 + 3 = 4.$$

A ноктасының ординатасы 5 иде, 1 булды, димәк, A ноктасы $1 - 5 = -4$ берәмлеккә күчә, ягъни аска төшә. M_1 ноктасының ординатасын табыйк:

$$10 - 4 = 6.$$

Җавап: M_1 (4; 6).

М и с а л.

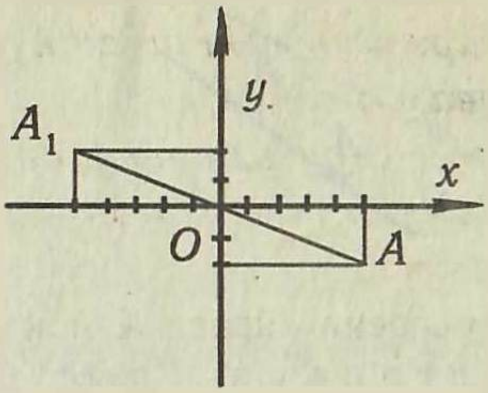
Координаталар башлангычына карата A (5; —2) ноктасына үзәк симметрияле A_1 ноктасының координаталарын табарга.

Ч и ш ү.

A ноктасын үзәк белән тоташтырабыз һәм үзәктән соң да дәвам итәбез.

$OA_1 = OA$ ны төзибез.

Җ а в а п: $A_1(-5; 2)$.



Координаталар (5; —2) иде, (—5; 2) булып үзгәрделәр: Шунлыктан, A_1 ноктасын төзеп тә тормыйча, барлык тамгаларны гына үзгәртергә мөмкин иде. Мәсәлән, үзәкле симметрия вакытында B (— 7; 3) ноктасы B_1 (7; —3) ноктасына, C (0; 2) ноктасы C_1(0; —2) ноктасына күчә.

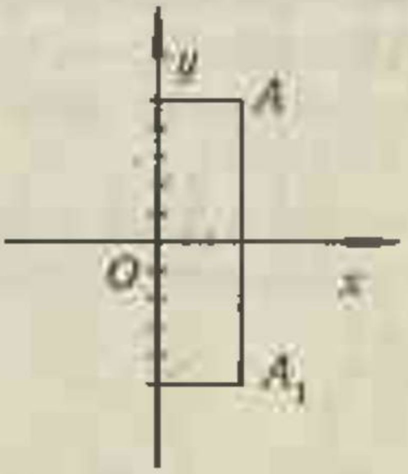
М и с а л.

x лар күчәренә карата A (3; 5) ноктасына симметрик A_1 ноктасының координаталарын табарга.

Ч и ш ү.

A ноктасыннан x лар күчәренә перпендикуляр төшерәбез һәм аны дәвам итәбез. A ноктасы x күчәреннән 5 кә биегрәк, димәк, A_1 ноктасы x күчәреннән 5 кә түбәнрәк була.

Җ а в а п: A_1 (3; —5).



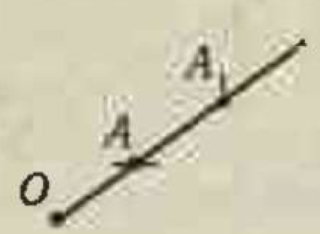
Координатаның x лар күчәре буенча үзгәрмәвен, ә y лар күчәре буенча үзгәрүен күрәбез. A һәм A_1 нокталарын төземәскә дә мөмкин иде.

y лар күчәренә карата бирелгән ноктага симметрияле нокта табарга кирәк булса, ординатаны үзгәртмәскә, абсциссаның тамгасын үзгәртергә кирәк.

x лар күчәренә карата бирелгән ноктага симметрик нокта табарга кирәк булса, абсциссаны үзгәрешсез калдырырга, ординатаның тамгасын үзгәртергә кирәк.

Без әлегә кадәр фигураның нокталары арасындагы ераклыклар саклана торган хәрәкәтләрне генә өйрәндек. Бу ераклыклар сакланмый

торган үзгәртүләрне өйрәнүгә керешербез. Болары — гомотетия һәм охшашлык.



A һәм O нокталарын алыйк. Ниндидер бер сан, мәсәлән, 2 саны бирелсен ди. OA нурын үткәрик. Бу нурда A ноктасына таба $OA_1 = 2 \cdot AO$ булырлык кисемтә төзибез. A_1 ноктасы O ноктасыннан A ноктасына караганда 2 тапкыр еррак урнашкан.

Билгеләмә. *Үзәге O һәм коэффициенты k булган гомотетия дип теләсә нинди бирелгән ноктадан O га кадәрге ераклык k тапкыр үзгәрә торган үзгәртү атала.*

Бу билгеләмәдән гомотетиянең хәрәкәт түгел икәнлеге килеп чыга. Гомотетия вакытында ераклыклар сакланмый.

Кагыйдә. *A ноктасына карата үзәге O һәм коэффициенты k булган гомотетик нокта төзү өчен түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:*

а) *A ноктасын O үзәге белән тоташтырырга,*

б) *A һәм O нокталары арасын үлчәргә,*

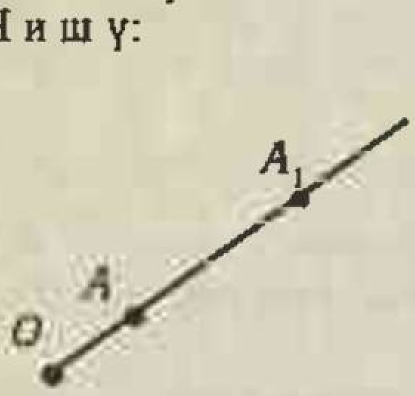
в) *аны k га тапкырларга,*

г) *k уңай сан булганда, A ноктасы ягына, k тискәре булганда капма-каршы якка таба A_1 ноктасын төзергә.*

Мисал.

A ноктасына карата үзәге O һәм коэффициенты $k = 3$ булган гомотетик A_1 ноктасын төзергә.

Чишү:



а) A һәм O нокталарын тоташтырабыз,

б) OA ны үлчибез,

в) OA ны 3 кә тапкырлыйбыз,

г) безнең мисалда $k = 3 > 0$, димәк, A_1 ноктасы да O ноктасыннан A ягына таба урнаша.

A_1 ноктасы A ноктасына гомотетик.

Мисал.

B ноктасына карата үзәге O һәм коэффициенты $k = -3$ булган гомотетик B_1 ноктасын төзергә.

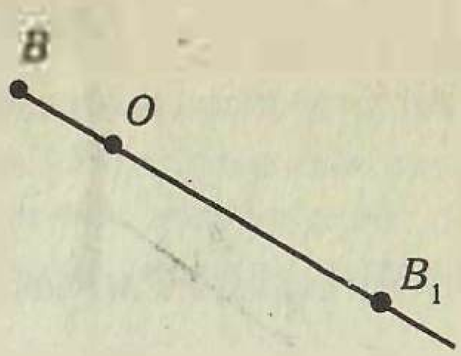
Чишү:

а) B һәм O нокталарын тоташтырабыз,

б) OB ны үлчибез,

в) OB ны 3 кә тапкырлыйбыз,

г) безнең мисалда $k = -3 < 0$, димәк, B_1 ноктасы O дан B ноктасына капма-каршы якка урнашыр.



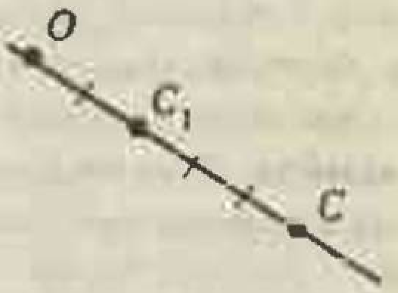
B_1 ноктасы B ноктасына гомотетик.

Мисал.

C ноктасына карата үзәге O һәм коэффициенты $k = \frac{2}{5}$ булган гомотетик C_1 ноктасын төзергә.

Төзү:

а) C һәм O нокталарын тоташтырабыз,



б) CO ны үлчибез,

в) CO ны $\frac{2}{5}$ гә тапкырлыйбыз,

г) $k = \frac{2}{5} > 0$, димәк, C_1 ноктасы O үзәгеннән C ноктасы ягында ята.

$\frac{2}{5} < 1$, шунлыктан C_1 ноктасы C га караганда үзәккә якынрак урнаша. CO кисемтәсен 5 өлешкә бүлеп, O үзәгеннән 2 өлешен билгелибез.

C_1 ноктасы C ноктасына гомотетик.

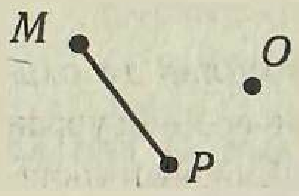
20 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Фигураны үзгәртү нәрсәне аңлата?
2. Параллель күчерү нәрсә ул?
3. Нинди үзгәртү хәрәкәт дип атала?
4. Параллель күчерү ничек башкарыла? Кагыйдә.
5. Бору нәрсә ул?
6. Боруны ничек үтәргә? Кагыйдә.
7. Үзәк симметрия нәрсә ул?
8. Үзәк симметрияне ничек башкарырга? Кагыйдә.
9. Күчәрле симметрия нәрсә ул?
10. Күчәрле симметрияне ничек башкарырга? Кагыйдә.
11. Гомотетия нәрсә ул?
12. Бирелгән үзәге һәм коэффициенты буенча бирелгән ноктага гомотетик ноктаны ничек төзергә?

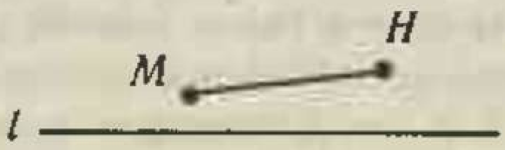
20 нче контроль эш

1. *AB* кисемтәсен төзегез һәм параллель күчерү эшләгез.

2. *O* үзәгенә карата *MP* кисемтәсенә үзәк симметрияле кисемтә төзегез.



3. *l* күчәренә карата *MH* кисемтәсенә симметрик кисемтә төзегез.



4. *ABC* өчпочмагы сызыгыз һәм аңа гомотетик өчпочмак төзегез. Гомотетия үзәген *O* ноктасы, коэффициентын $k = 2$ дип алыгыз.

§ 21. ҮЗГӘРТҮЛӘР (2)

Б и л г е л ә м ә. *Эзлекле рәвештә гомотетия һәм хәрәкәтләр башкарыла торган үзгәртүләр охшаш үзгәртүләр дип атала.*

Б и л г е л ә м ә. *Бер фигура икенчесенә әверелерлек итеп гомотетия һәм хәрәкәтләр башкарырга мөмкин булса, бу фигуралар охшаш дип аталалар.*

М и с а л.

Дөньядагы барлык квадратлар да охшаш.

Ике квадрат алыйк, беренчесе — зуррак, аңсы тактада, икенчесе — кечерәк, дәфтәрдә ясалсын. Аларның якларын үлчик, зур квадратның ягы кечкенәсенекеннән ничә тапкырга зуррак икәнен табабыз. Бу сан гомотетия коэффициенты k булыр. Дәфтәрдә теләсә нинди O үзәген алып, k коэффициенты белән кечкенә квадратка гомотетик квадрат төзибез. Яңа квадратның яклары кечкенә квадрат якларыннаң k тапкырга зуррак булыр, ләкин тактадагы квадратның яклары да k тапкыр зуррак иде. Димәк, тактадагы һәм яңа төзелгән квадрат үзара тигез, яңа квадратны кисеп алып тактага урнаштырып куярга, ягъни хәрәкәтләр башкарырга мөмкин. Шулай итеп, без бер квадратны икенчесенә әверелдерә торган гомотетия һәм хәрәкәтләр сайлап алдык, ә бу — квадратлар охшаш дигән сүз.

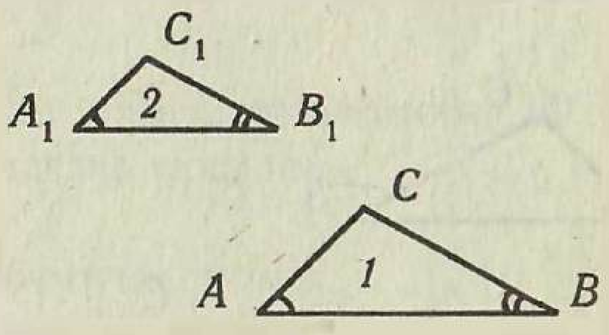
Мисалдан күренгәнчә, бер фигураны икенчесенә әйләндерә торган гомотетия һәм хәрәкәтләр сайлап алу шактый кыен эш. Шуңа күрә, бу эшне җиңеләйтүче теоремаларны исбат итик.

ӨЧПОЧМАКЛАРНЫҢ ОХШАШЛЫК БИЛГЕЛӘРЕ

Өчпочмаклар охшашлыгының беренче билгесе

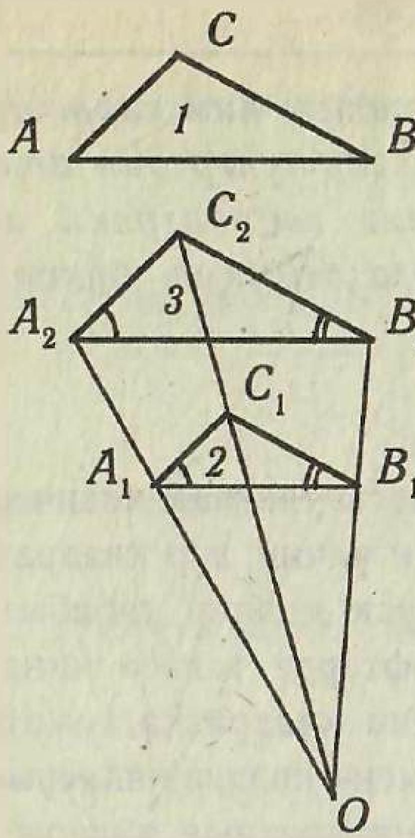
Т е о р е м а 21.1. ***Әгәр бер өчпочмакның ике почмагы икенче өчпочмакның ике почмагына тиңдәшле рәвештә тигез булса, бу өчпочмаклар охшаш булалар.***

Б и р е л г ә н:
1 һәм 2 өчпочмаклары,
$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.
И с б а т л а р г а:
1 өчпочмагы 2 өчпочмагына охшаш.



И с б а т л а у:

AB һәм A_1B_1 якларын үлчибез һәм AB ны A_1B_1 гә бүләбез, k саны килеп чыга, димәк, AB ягы A_1B_1 ягыннан k тапкырга зуррак. 2 өчпоч-



магына, ирекле O үзәге һәм k коэффициенты белән гомотетик итеп, 3 өчпочмагын төзибез. Бу очракта A_2B_2 ягының A_1B_1 ягыннан k тапкырга зуррак икәнен искәртик. Моннан $AB = A_2B_2$ килеп чыга.

A_1 почмагы A_2 почмагына төзү буенча тигез, A_1 почмагы А почмагына шарт буенча тигез, димәк, A почмагы A_2 почмагына тигез.

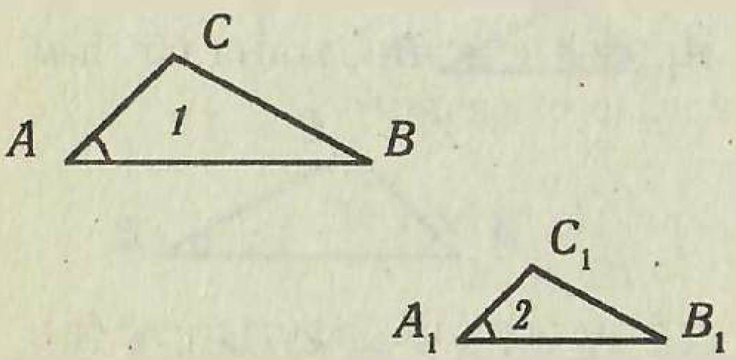
B_1 почмагы B_2 почмагына төзү буенча, B почмагына шарт буенча тигез, шунлыктан, B почмагы B_2 почмагына тигез була.

Нәтиҗә: 1 һәм 3 өчпочмаклары икенче билге буенча үзара тигез. Шулай итеп, 1 һәм 3 өчпочмаклары тигез, 2 һәм 3 өчпочмаклары гомотетик, димәк, 1 һәм 2 өчпочмаклары охшаш булыр. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

"Охшаш" сүзен кыскарту өчен "$\sim$" билгесе кулланыла. "$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$" язылышы "$ABC$ өчпочмагы $A_1B_1C_1$ өчпочмагына охшаш" дип укыла.

Өчпочмаклар охшашлыгының икенче билгесе

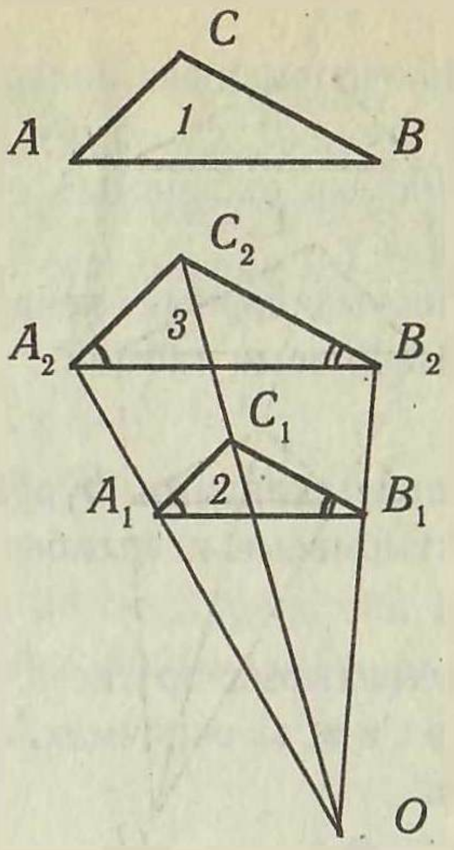
Теорема 212. ***Әгәр бер өчпочмакның ике ягы икенче өчпочмакның ике ягына пропорциональ, ә бу яклар арасындагы почмаклар тигез булса, бу өчпочмаклар охшаш булалар.***



Бирелгән:
1 һәм 2 почмаклары,
$\angle A = \angle A_1$.
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Исбатларга:
1 өчпочмагы 2 өчпочмагына охшаш.

И с б а т л а у:



$\frac{AB}{A_1B_1} = k$ булсын. 2 өчпочмагына үзәге O һәм коэффициенты k белән гомотетик булган 3 өчпочмагын төзибез. Биредә A_2B_2 ягы A_1B_1 ягыннан k тапкырга зуррак була. Моннан $AB = A_2B_2$ икәнлеге килеп чыга. Шулай ук $AC = A_2C_2$ икәнлеген табабыз. A_1 почмагы A_2 почмагына төзү буенча, A почмагына шарт буенча тигез, димәк, A почмагы A_2 почмагына тигез була.

Н ә т и ж ә: 1 һәм 3 өчпочмаклары беренче билге буенча тигез. Шулай итеп, 1 һәм 3 өчпочмаклары тигез, 2 һәм 3 өчпочмаклары гомотетик, димәк, 1 һәм 2 өчпочмаклары охшаш була. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

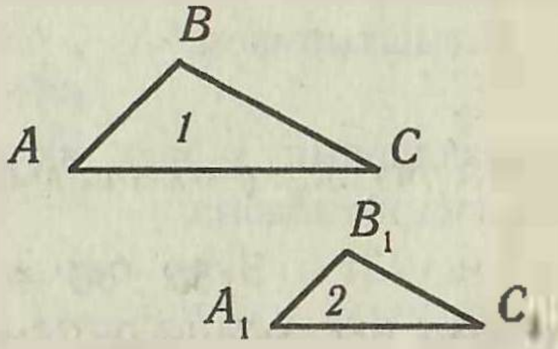
Өчпочмаклар охшашлыгының өченче билгесе

Т е о р е м а 21.3. ***Әгәр бер өчпочмакның яклары икенче өчпочмакның якларына пропорциональ булса, андый өчпочмаклар охшаш булалар.***

Б и р е л г ә н:

1 һәм 2 өчпочмаклары,

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.



И с б а т л а р г а:

$\Delta 1 \sim \Delta 2$.

И с б а т л а у:

21.3 теоремасын исбатлау 21.2 теоремасын исбатлауга охшаган. Аны үзлегегездән башкарыгыз.

М и с а л.

Бер өчпочмакның 60° һәм 70° лы, икенче өчпочмакның 60° һәм 50° лы почмаклары бар. Бу өчпочмаклар охшашмы?

Ч и ш ү.

Беренче өчпочмакның өченче почмагын табыйк:

$$180° - 60° - 70° = 50°.$$

Бу өчпочмакларның 60° лы һәм 50° лы ике тигез почмаклары бар.

Н ә т и ж ә: өчпочмаклар охшашлыкның беренче билгесе буенча охшаш.

М и с а л.

Бер өчпочмакның яклары 12 см һәм 16 см, икенче өчпочмакның — 15 см һәм 20 см, ә бу яклар арасындагы почмаклар тигез. Бу өчпочмаклар охшашмы?

Ч и ш ү.

Өчпочмакларның кечерәк яклары 12 см һәм 15 см, аларның чагыштырмасын табыйк:

$$12 : 15 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

Өчпочмакларның зуррак яклары 16 см һәм 20 см. Аларның чагыштырмасын исәплибез:

$$16 : 20 = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

Чагыштырмалар тигез, димәк, яклар пропорциональ.

Н ә т и җ ә: өчпочмаклар охшашлыкның икенче билгесе буенча охшаш.

М и с а л.

Бер өчпочмакның яклары 15 см, 20 см һәм 30 см. Икенче өчпочмакның яклары 45 см, 60 см һәм 80 см. Бу өчпочмаклар охшашмы?

Ч и ш ү.

Өчпочмакларның кечерәк яклары 15 см һәм 45 см. Аларның чагыштырмасы:

$$45 : 15 = 3.$$

Өчпочмакларның урта озынлыктагы яклары 20 см һәм 60 см. Аларның чагыштырмасы:

$$60 : 20 = 3.$$

Өчпочмакларның зуррак яклары 80 см һәм 30 см. Аларның чагыштырмасын табабыз:

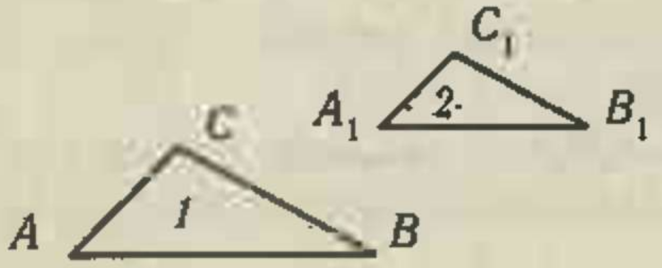
$$80 : 30 = \frac{80}{30} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Ике пар як пропорциональ, ә өченче яклар аларга пропорциональ түгел.

Н ә т и җ ә: өчпочмаклар охшаш түгел.

21.3 теоремасына кире теорема

Т е о р е м а 21.4. ***Өчпочмаклар охшаш булса, аларның яклары пропорциональ.***



Б и р е л г ә н:
$\Delta 1 \sim \Delta 2$.
И с б а т л а р г а:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Исбатлау.

1 һәм 2 өчпочмаклары охшаш булганлыктан, 2 өчпочмагы 1 өчпочмагына тәңгәл килерлек итеп, гомотетия һәм хәрәкәтләр сайлап алырга мөмкин. Ә моннан, 1 өчпочмагын табу өчен 2 өчпочмагының якларын k тапкыр үзгәртергә кирәк дигән сүз. Биредә k — тиңдәш якларның чагыштырмасы, ягъни:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мисал.

Өчпочмакның яклары 15 см, 30 см һәм 25 см. Зуррак ягы 120 см булса, бу өчпочмакка охшаш булган икенче өчпочмакның якларын табарга.

Бирелгән:
$a = 15$ см, $b = 30$ см,
$c = 25$ см, $b_1 = 120$ см.

Табарга:
a_1 һәм c_1 не.

Чишү:

Бирелгән өчпочмакның зуррак ягы 30 см га, ә аңа охшаш икенче өчпочмакның зуррак ягы 120 см га тигез.

$120 : 30 = 4$ — охшашлык коэффициенты.

21.4 теоремасы буенча барлык башка яклары да беренче өчпочмак якларыннан 4 тапкыр зуррак булыр.

$$a_1 = 15 \cdot 4 = 60,$$
$$c_1 = 25 \cdot 4 = 100.$$

Җавап: 60 см, 100 см һәм 120 см.

Мисал.

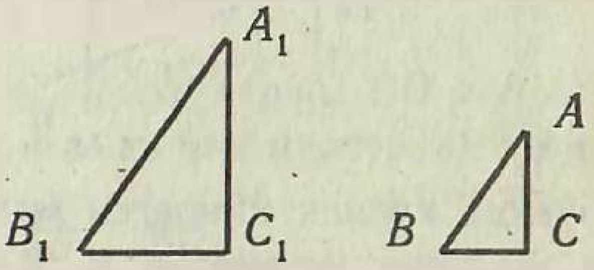
Көннең бер үк вакытында 1,5 м озынлыктагы кешенең күләгәсе 2 м, ә трубаның күләгәсе 40 м. Трубаның биеклеген табарга.

Бирелгән:
$BC = 1{,}5$ м,
$AC = 2$ м, $A_1C_1 = 40$ м.

Табарга: B_1C_1 не.

Чишү.

ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларын тикшерик.



Аларда:

$\angle C = \angle C_1 = 90°$ — кеше дә, труба да вертикаль торалар.

$\angle A = \angle A_1$ — күләгә бер үк вакытта бертөрле почмак ясап төшә.

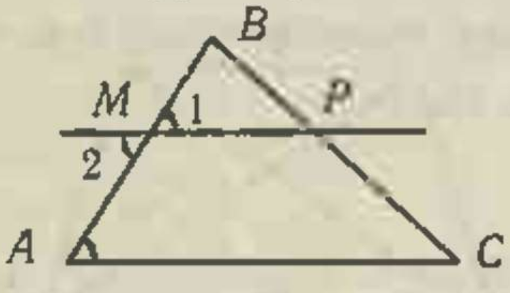
Нәтиҗә: өчпочмаклар беренче билге буенча охшаш. Ә 21.4 теоремасы буенча, охшаш өчпочмакларның яклары пропорциональ була. Бу исә, трубаның күләгәсе кеше күләгәсеннән ничә тапкырга озынрак булса, аның озынлыгы да кеше озынлыгыннан шуның кадәр озынрак дигән сүз.

Охшашлык коэффициентын табабыз: тиңдәш яклар 2 м һәм 40 м га тигез:

40 : 2 = 20(м), 1,5 · 20 = 30(м).

Җ а в а п: 30 м.

Т е о р е м а 21.5. ***Өчпочмакның ягына параллель итеп үткәрелгән туры бу өчпочмакка охшаш өчпочмак кисеп ала.***



Б и р е л г ә н:
$\triangle ABC$,
$MP \parallel AC$.
И с б а т л а р г а:
$\triangle BMP \sim \triangle ABC$.

И с б а т л а у:

$\angle A = \angle 2$ — параллель турылар янында аркылы ятучы почмаклар,

$\angle 2 = \angle BMP$ — вертикаль почмаклар, димәк, $\angle A = \angle BMP$.

ABC һәм BMP өчпочмакларын тикшерик. Аларда:

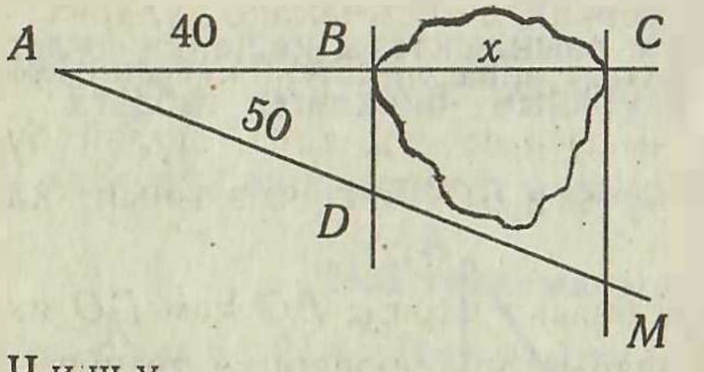
$\angle B$ — уртак почмак,

$\angle A = \angle BMP$ — алдагы исбатлау буенча.

Н ә т и җ ә: өчпочмаклар охшашлыкның беренче билгесе буенча охшаш. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

М и с а л.

Күлнең киңлеген билгеләргә.



Б и р е л г ә н:
$AB = 40$м,
$AD = 50$м,
$AM = 150$м.
Т а б а р г а:
BC ны.

Ч и ш ү.

Яр буенда күлнең киңлеген билгеләү өчен, казыклар утыртып, араларын үлчиләр. CM га параллель BD үткәрәләр.

21.5 теоремасы буенча ABD һәм ACM өчпочмаклары охшаш, димәк, аларның яклары пропорциональ. Охшашлык коэффициентын табабыз:

$$AM : AD = 150 : 50 = 3.$$

Димәк, икенче пар якларның да чагыштырмасы 3 кә тигез. BC кисемтәсен x дип билгеләсәк, $AC = AB + x$ булыр. Пропорция төзибез:

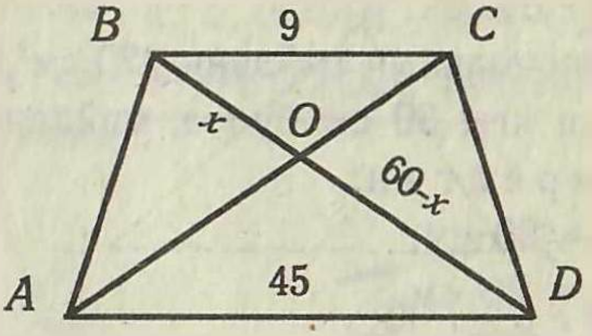
$$\frac{AC}{AB} = \frac{40+x}{40} = {}^{40}/_{3}.$$
$$40 + x = 120,$$
$$x = 80.$$

Җ а в а п: 80 м.

М и с а л.

$ABCD$ трапециясендә AD һәм BC яклары параллель, O — диагональләрнең кисешү ноктасы. $BC = 9$ см, $AD = 45$ см, $BD = 60$ см. BO һәм DO ны табарга.

Б и р е л г ә н:
$ABCD$ — трапеция,
$BC = 9$ см, $AD = 45$ см,
$BD = 60$ см.
Т а б а р г а:
BO һәм DO ны.



Ч и ш ү:

BCO һәм ADO өчпочмакларын тикшерик. Аларда: $\angle CBO = \angle ADO$ — BC һәм AD параллель турыларын BD кисүчесе белән кискәндә аркылы ятучы почмаклар.

$\angle BCO = \angle DAO$ — BC һәм AD параллель турылары янындагы AC кисүчесе белән кискәндә аркылы ятучы почмаклар.

Нәтиҗә: өчпочмаклар беренче билге буенча охшаш. Охшаш өчпочмакларда яклар пропорциональ була.

Пропорцияне ничек төзергә? Почмакларны карарга кирәк.

BOC һәм AOD почмаклары, вертикаль почмаклар буларак, үзара тигез. Аларга каршы BC һәм AD яклары ята: $\frac{BC}{AD}$ чагыштырмасын төзибез. Санаучыда BOC өчпочмагының ягы тора, шулай булгач, башка чагыштырмаларда да санаучыга BOC өчпочмагының якларын куярга кирәк.

BCO һәм DAO тигез почмакларына каршы BO һәм DO яклары ята. Аларның чагыштырмасын язабыз һәм пропорция төзибез:

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{DO}.$$

BO ягын x дип билгеләсәк, DO ягы $(60 - x)$ булыр.

Пропорциягә саннар һәм аңлатмаларны куйыйк:

$$\frac{9}{45} = \frac{x}{60-x}.$$

Пропорциядә кырый буыннар тапкырчыгышы урта буыннар тапкырчыгышына тигез була.

$$9 \cdot (60 - x) = 45 \cdot x,$$
$$540 = 54x,$$
$$x = 10.$$
$$60 - 10 = 50 \text{ (см)}.$$

Җавап: 10 см һәм 50 см.

Теорема 21.6. ***Охшаш фигураларның мәйданнары чагыштырмасы тиңдәш якларның квадратлары чагыштырмасына тигез.***

Бу теореманы исбатлаусыз гына кабул итәрбез.

Мисал.

Өчпочмакның мәйданы 120 см², бер ягы 20 см. Охшаш өчпочмакның тиңдәш ягы 30 см булса, мәйданын табарга.

Бирелгән:
$a = 20$ см,
$a_1 = 30$ см,
$S = 120$ см².

Табарга:
S_1 не.

Чишү:

Охшашлык коэффициентын табабыз:

$$30 : 20 = 1{,}5.$$

21.6 теоремасы буенча икенче өчпочмакның мәйданы беренче өчпочмак мәйданыннан $(1{,}5)^2 = 2{,}25$ тапкырга зуррак.

$S_1 = 120 \cdot 2{,}25 = 270$ (см²).

Җавап: 270 см².

21 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Нинди үзгәртүләр охшаш үзгәртүләр дип атала?
2. Нинди фигуралар охшаш фигуралар дип атала?
3. 21.1 һәм 21.5 теоремаларын исбатлагыз.
4. 21.2, 21.3, 21.4, 21.6 теоремалары ничек укыла?

"4" ле өчен өстәмә рәвештә 21.2 һәм 21.4 теоремаларын исбатларга.
"5" ле өчен өстәмә рәвештә 21.3 теоремасын исбатларга.

21 нче контроль эш

1. Өчпочмакның яклары 22 см, 33 см һәм 44 см. Бу өчпочмакка охшаш булган икенче өчпочмакның периметры 297 см булса, якларын табарга.

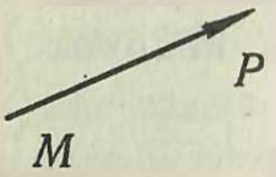
2. $ABCD$ трапециясендә AD һәм BC — параллель яклар, O — диагональләр кисешү ноктасы. $CO = 5$ см, $AD = 10$ см һәм $BD = 18$ см. BO һәм DO ны табарга.

9 нчы сыйныф

§ 22. ВЕКТОРЛАР

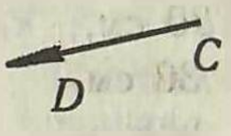
Б и л г е л ә м ә. *Юнәлешле кисемтә вектор дип атала.*

Векторлар латин алфавитының юл хәрефләре өстенә сызык куеп, яки ике баш хәреф белән билгеләнә: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{AB}$, $\overline{MP}$, $\overline{CD}$. Ике хәреф белән билгеләгәндә беренче хәреф векторның башлангычын, икенче хәреф ахырын билгели. Мәсәлән:



MP векторы

a векторы



CD векторы

Векторның озынлыгы түбәндәгечә тамгалана:

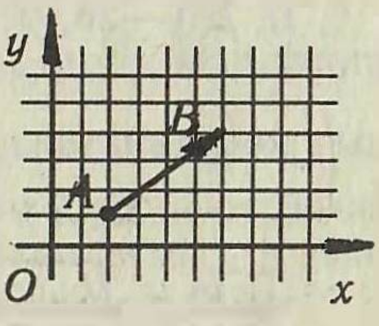
$$|\overline{a}|, \ |\overline{AB}|$$

Озынлыгы булмаган вектор *нуль вектор* дип атала.

Координаталар яссылыгында *AB* векторын төзик. *A* (2; 1), *B* (6; 4).

Ул 4 шакмакка уңга, 3 шакмакка өскә юнәлгән.

6 — 2 = 4, 4 — 1 = 3.



4 һәм 3 саннары векторның *координаталары* дип атала.

Б и л г е л ә м ә. *Әгәр векторның башлангычы* $(x_1; y_1)$, *ахыры* $(x_2; y_2)$ *координаталары белән билгеләнсә,* $x_2 - x_1$ *һәм* $y_2 - y_1$ *саннары векторның координаталары дип атала.*

Векторның координаталары аның юнәлешен билгели. Мәсәлән, $\overline{a}$ (5; —2) векторы 5 берәмлеккә уңга, 2 берәмлеккә аска юнәлгән, $\overline{b}$ (—3; 8) векторы 3 берәмлеккә сулга, 8 берәмлеккә югарыга юнәлгән.

Кагыйдә: *Векторның координаталарын белү өчен, аның ахырының координаталарыннан башлангычының тиңдәш координаталарын алырга кирәк.*

Мисал.

A (7; 1), B (10; 5) нокталары бирелгән. $\overline{AB}$ векторының координаталарын табарга.

Чишү:

$$x = 10 - 7 = 3,$$
$$y = 5 - 1 = 4.$$

Җавап: $\overline{AB}$ (3;4).

8 нче сыйныф геометриясеннән билгеле булганча, $A(x_1; y_1)$ һәм $B(x_2; y_2)$ нокталары арасындагы ераклыкны

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

формуласы белән исәплибез. Бу формула шулай ук вектор озынлыгын исәпләргә дә ярый. Ләкин $x_2 - x_1$ һәм $y_2 - y_1$ нең векторның координаталары икәнен исәпкә алсак, түбәндәге кагыйдә килеп чыга.

Кагыйдә. *Векторның озынлыгын табу өчен, аның координаталарының квадратлары суммасыннан квадрат тамыр алырга кирәк.*

Мисал.

1) $\overline{m}$ (—5; 2) векторының озынлыгын табарга.

Чишү:

$$|\overline{m}| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}.$$

Җавап: $|\overline{m}| = \sqrt{29}$.

2) A (6; 1), B (—26; 0). $\overline{AB}$ векторының озынлыгын табарга.

Чишү:

$\overline{AB}$ ның координаталарын табыйк:

—26 — 6 = — 32; 0 — 1 = — 1, димәк, $\overline{AB}$ (—32; —1).

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-32)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1024 + 1} = \sqrt{1025}.$$

Җавап: $\sqrt{1025}$.

Векторларны кушу

Билгеләмә. *Ике векторның суммасы дип координаталары кушылучы векторларның тиңдәшле координаталары суммасына тигез булган вектор атала.*

Мисал:

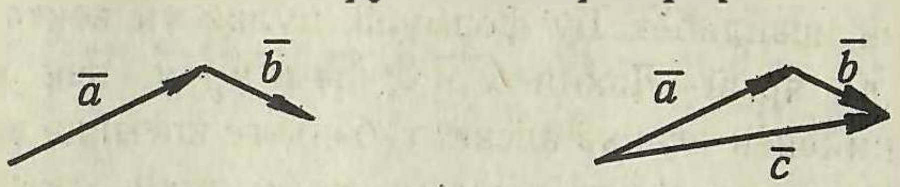
$\overline{a}$ (2; 5), $\overline{b}$ (10; —2) векторлары бирелгән. $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ һәм $\overline{m} = \overline{a} - \overline{b}$ векторларын табарга.

Ч и ш ү:

$$2 + 10 = 12,$$
$$5 - 2 = 3, \text{ димәк } \overline{c}\ (12;\ 3),$$
$$2 - 10 = -8,$$
$$5 + 2 = 7, \text{ димәк } \overline{m}\ (-8;\ 7).$$

Вектор — юнәлешле кисемтә булганлыктан, физикада векторларны башкача кушалар. Әгәр $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары бирелгән булса, аларны кушу өчен аларны икенче векторның башлангычы беренчесенең ахыры белән тәңгәл килерлек итеп бер-бер артлы төзергә кирәк.

Аларның суммасы булып беренче векторның башлангычын икенчесенең ахыры белән тоташтыручы вектор торыр.



$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$

Бу кагыйдә гади геометрик мәгънәгә ия. Башта $\overline{a}$ векторына, аннары $\overline{b}$ векторына ике параллель күчерү үтәү урынына бер $\overline{c}$ векторына күчерү үтәргә мөмкин. Нәтиҗә шул ук булачак.

Векторны санга тапкырлау

Б и л г е л ә м ә. *Векторның санга тапкырчыгышы дип координаталары бирелгән векторның координаталарын бирелгән санга тапкырланган вектор атала.*

М и с а л.

1). Б и р е л г ә н: $\overline{a}$ (5; 7), $k = 2$. $k\overline{a}$ векторының координаталарын табарга.

Ч и ш ү:

$$5 \cdot 2 = 10, \qquad 7 \cdot 2 = 14.$$

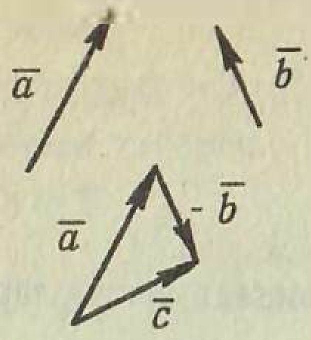
Җ а в а п: $k\overline{a}$ (10; 14).

Векторларны алу

Б и л г е л ә м ә. *$\overline{a}$ векторы белән бер үк озынлыктагы, ләкин капма-каршы якка юнәлгән вектор $\overline{a}$ векторына капма-каршы вектор дип атала.*

$\overline{a}$ һәм $-\overline{a}$ векторлары капма-каршы векторлар.

Кагыйдә. *$\overline{a}$ векторыннан $\overline{b}$ векторын алу өчен $\overline{a}$ векторын $\overline{b}$ векторына капма-каршы вектор белән кушарга кирәк.*



1. $\overline{a}$ векторының ахырыннан башлап $\overline{b}$ векторына капма-каршы булган $-\overline{b}$ векторын төзибез.

2. $\overline{a}$ векторының башлангычын $-\overline{b}$ векторының ахыры белән тоташтырабыз, $\overline{c}$ векторы килеп чыга: $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$.

Мисал.

$\overline{a}$ $(-3; -1)$, $\overline{b}$ $(3; -2)$ бирелгән булса, $\overline{m} = 3\overline{a} - 2\overline{b}$ ын табарга.

Чишү:

$\overline{a}$ $(-3; -1)$, $3\overline{a}$ $(-9; -3)$.

$\overline{b}$ $(3, -2)$, $2\overline{b}$ $(6; -4)$.

$-9 - 6 = -15, \quad -3 - (-4) = -3 + 4 = 1.$

Җавап: $(-15; 1)$.

Векторларның скаляр тапкырчыгышы

Билгеләмә. *$\overline{a}$ $(a_1; a_2)$ һәм $\overline{b}$ $(b_1; b_2)$ векторларының скаляр тапкырчыгышы дип $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ саны атала.*

Мисал.

$\overline{a}$ $(2; 3)$ һәм $\overline{b}$ $(5; 1)$ векторлары бирелгән булса, аларның скаляр тапкырчыгышын табарга.

Чишү:

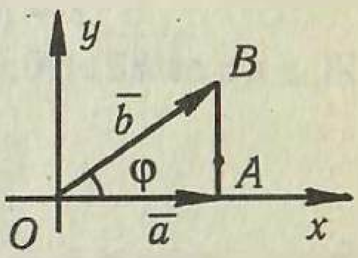
$2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 10 + 3 = 13.$

Җавап: 13.

Теорема 22.1. ***Ике векторның скаляр тапкырчыгышы аларның озынлыклары белән шул векторлар арасындагы почмак косинусының тапкырчыгышына тигез.***

Бирелгән:

$\overline{a}$ һәм $\overline{b}$, φ — алар арасындагы почмак.



Исбатларга:

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi$

Исбатлау:

1. $\overline{a}$ векторы абсциссалар күчәрендә ятарлык итеп, координаталар системасы төзибез (рәсемне карагыз). $\overline{a}$ векторының координаталары $(|\overline{a}|; 0)$ булыр. ΔOAB — турыпочмаклы, $OB = |\overline{b}|$, $\angle BOA = \varphi$.

$$\cos\varphi = \frac{OA}{OB}; \ \cos\varphi = \frac{OA}{|\overline{b}|}, \quad OA = |\overline{b}|\cos\varphi.$$

$$\sin\varphi = \frac{AB}{OB}; \ \sin\varphi = \frac{AB}{|\overline{b}|}; \quad AB = |\overline{b}|\sin\varphi.$$

$\overline{b}$ векторының координаталары: $(|\overline{b}|\cos\varphi; |\overline{b}|\sin\varphi)$.

2. $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторларының скаляр тапкырчыгышын табабыз:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi + 0 \cdot \overline{b} \cdot \sin\varphi = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi.$$

Теорема исбат ителде.

Нәтиҗә. *Бирелгән векторлар үзара перпендикуляр булсалар, аларның скаляр тапкырчыгышы нульгә тигез була.*

Исбатлау:

Әгәр векторлар арасындагы почмак 90° ка тигез булса, аның косинусы нульгә тигез. Шуңа күрә скаляр тапкырчыгыш та нульгә тигез була.

Мисал.

1) Бирелгән:

$\left|\overline{a}\right| = 5$, $\left|\overline{b}\right| = 2$, $\varphi = 60°$.

Табарга:

$\overline{a} \cdot \overline{b}$.

Чишү:

$\overline{a} \cdot \overline{b} = 5 \cdot 2 \cos 60° = 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 5.$

Җавап: 5.

2) Әгәр $\overline{a}$ (2; 5) булса, ике ысул белән $\overline{a}^2$ ны табарга.

Чишү:

1 нче юл.

Билгеләмә буенча $\overline{a}^2 = \overline{a} \cdot \overline{a} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 4 + 25 = 29$.

2 нче юл.

$\overline{a}$ векторының озынлыгын табыйк:

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}, \quad \overline{a}^2 = \overline{a} \cdot \overline{a}.$$

$\overline{a}$ белән $\overline{a}$ арасындагы почмак 0°. Аның косинусы 1 гә тигез.

$$\overline{a}^2 = \overline{a} \cdot \overline{a} = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{a}\right| \cos\varphi = \sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot 1 = 29.$$

Җавап: 29.

3) $\overline{a}$ (5; 0); $\overline{b}$ (1; 4) бирелән. Алар арасындагы почмакны табарга.

Чишү.

Теорема буенча $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi$, моннан чыгып:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|}.$$

Димәк, векторлар арасындагы почмакның косинусын табу өчен, аларның скаляр тапкырчыгышын векторлар озынлыгы тапкырчы-

гышына бүләргә кирәк. Башта скаляр тапкырчыгышны табыйк:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 5 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5.$$

Векторлар озынлыгын табыйк:

$$|\bar{a}| = \sqrt{25 + 0} = 5;$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}.$$

cos φ не табыйк:

$$\cos\varphi = \frac{5}{5\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{4,1} \approx 0,25.$$

Таблица ярдәмендә косинусы 0,25 кә тигез булган почмакны табабыз.

Җ а в а п: 76°.

М и с а л.

Бирелгән A (4; 2); B (2; — 4); C (— 4; — 2); D (— 2; 4). AB һәм CD турыларының параллель икәнен исбатларга:

И с б а т л а у:

AB һәм CD векторларының координаталарын табабыз.

A (4; 2), B (2; — 4), 2 — 4 = — 2; — 4 — 2 = — 6, AB (— 2; — 6);

C (— 4; — 2); D (— 2; 4); — 2 — (— 4) = 2; 4 — (—2) = 6; CD (2; 6).

$\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ ның скаляр тапкырчыгышын табабыз.

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = -2 \cdot 2 + (-6) \cdot 6 = -4 - 36 = -40.$$

Векторларның озынлыгы:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40},$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40},$$

$$\cos\varphi = \frac{-40}{\sqrt{40}\sqrt{40}} = \frac{-40}{40} = -1.$$

Димәк, векторлар арасындагы почмак 180° ка тигез, шуңа күрә векторлар һәм шулай ук турылар да параллель була. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

22 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Вектор нәрсә ул?
2. Векторның координаталары.
3. Векторның координаталарын табу кагыйдәсе.
4. Вектор озынлыгын табу формуласы.

5. Векторларның суммасы.

6. Векторны санга тапкырлау.

7. Ике векторның скаляр тапкырчыгышы.

8. 22.1 теоремасы һәм аның нәтиҗәсе ничек укыла?

"4" һәм "5" билгесенә өстәмә эш: 22.1 теоремасын һәм нәтиҗәсен исбатларга.

22 нче контроль эш

1. $A\ (-2;\ 4)$; $B\ (2;\ 5)$; $C\ (0;\ 3)$; $D\ (-2;\ 0)$ нокталары бирелгән.

а) $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ векторларының координаталарын табарга.

б) $\overline{x} = 2\overline{AB} - 4\overline{CD}$ векторының координаталарын табарга.

в) $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ векторлары арасындагы почмакның косинусын табарга.

2. Түбәләре $A\ (4;\ 1)$, $B(1;\ -4)$, $C\ (-4;\ -1)$, $D\ (-1;\ 4;)$ нокталарында булган $ABCD$ дүртпочмагының ромб икәнен исбатларга.

§ 23. ӨЧПОЧМАКЛАРНЫ ЧИШҮ

Сигезенче сыйныфта без турыпочмаклы өчпочмакларны чишкән идек инде. Искә төшереп үтик, *өчпочмакны чишү — аның билгесез якларын һәм почмакларын табу дигән сүз.*

Турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасын "c" хәрефе, катетларын "a" һәм "b" хәрефләре белән билгеләү турында без сөйләшкән идек инде.

Мисал.

Турыпочмаклы өчпочмакларны чишәргә.

1) Бирелгән: $a = 7$; $b = 10$.

Табарга: c, α, β ны.

Чишү: $a^2 + b^2 = c^2$,

$49 + 100 = c^2$

$c^2 = 149$,

$c = \sqrt{149}$ һәм $c = -\sqrt{149}$ — мәсьәләнең шартын канәгатьләндерми.

α почмагын табыйк: $c \approx 12$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{7}{10} = 0{,}7.$$

Таблицадан $\alpha = 35°$ икәнен табабыз.

$\beta = 180° - 90° - 35° = 55°$.

Җавап: 12, 35°, 55°.

2) Бирелгән: $a = 7$; $\alpha = 30°$.

Табарга: b, c, β ны.

Чишү:

$\beta = 180° - 90° - 30° = 60°$.

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$,

$0{,}5 = \frac{7}{c}$,

$0{,}5c = 7$,

$c = 7 : 0{,}5$,

$c = 14$.

$a^2 + b^2 = c^2$,

$49 + b^2 = 196$.

$b^2 = 147$

$b = \sqrt{147}$; $b = -\sqrt{147}$ — шартка туры килми.

Җавап: $\sqrt{147}$, 14, 60°.

Теләсә нинди турыпочмаклы өчпочмакны чишү өчен Пифагор теоремасын, синус, косинус, тангенс һәм котангенс функцияләренең билгеләмәсен куллану җитә. Ә турыпочмаклы булмаган өчпочмак-

ларны чишү өчен тагын ике теореманы белергә кирәк. Өчпочмакның якларын "a", "b", "c" хәрефләре белән билгелик. Хәзер өчпочмак турыпочмаклы түгел, шуңа күрә "c" ягы гипотенуза түгел.

Косинуслар теоремасы

Теорема 23.1. ***Өчпочмакның теләсә кайсы ягының квадраты калган ике ягының квадратлары суммасына-минус шул яклар белән алар арасындагы почмак косинусының икеләтелгән тапкырчыгышына тигез.***

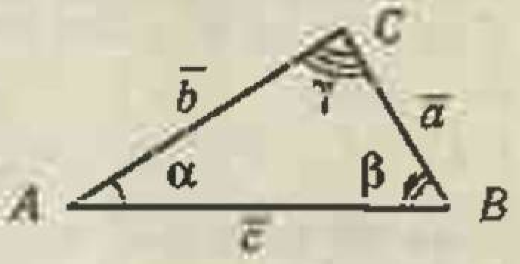
Бирелгән: $\triangle ABC$.

Исбатларга:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$,

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.



Исбатлау:

Өчпочмакның якларын векторлар итеп карыйк: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. $\bar{c}$ һәм $\bar{a}$ векторларының суммасы $\bar{b}$ векторын бирә.

$$\bar{b} = \bar{c} + \bar{a}, \text{ моннан } \bar{a} = \bar{b} - \bar{c}.$$

Тигезлекнең ике ягын да скаляр квадратка күтәрсәк,

$$\bar{a}^2 = (\bar{b} - \bar{c})^2 = \bar{b}^2 - 2\overline{bc} + \bar{c}^2.$$

Ике векторның скаляр тапкырчыгышы бу векторлар озынлыкларының алар арасындагы почмак косинусының тапкырчыгышына тигез. Векторның скаляр квадраты озынлыгының квадратына тигез. (Һәр векторның үзе белән ике арадагы почмакның зурлыгы 0° булганга, $\cos 0° = 1$.)

Шулай итеп,

$$\left|\bar{a}^2\right| = \left|\bar{b}^2\right| + \left|\bar{c}^2\right| - 2\left|\bar{b}\right| \cdot \left|\bar{c}\right| \cdot \cos\alpha,$$

яки

$$\bar{a}^2 = \bar{b}^2 + \bar{c}^2 - 2\overline{bc}\cos\alpha.$$

Теорема исбат ителде. Калган ике очракны исбатлау өчен, векторларның юнәлешләрен генә үзгәртергә кирәк.

Нәтиҗәләр. 1) Әгәр C почмагы җәенке булса, косинуслар теоремасы түбәндәгечә була:

$$\bar{a}^2 = \bar{b}^2 + \bar{c}^2 - 2\overline{bc}\cos(180° - \angle C).$$

Исбатлау: C почмагы җәенке булса, аның косинусы тискәре була. $\cos C < 0°$, ә кыйммәте аны 180° ка тутыручы почмакның косинусының капма-каршысына тигез.

$$\cos C = -\cos(180° - \angle C).$$

Моннан чыгып:

$$\overline{c}^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2 - 2\overline{a}\overline{b}(-\cos(180° - \angle C))$$

яки

$\overline{c}^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2 + 2\overline{a}\overline{b}\cos(180° - \angle C)$ икәнен исбат итәргә кирәк иде.

2. Пифагор теоремасы косинуслар теоремасының бер очрагы:

Исбатлау: C почмагы 90° булганда,

$$\cos C = \cos 90° = 0,$$

һәм

$$\overline{c}^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2 - 2\overline{a}\overline{b} \cdot \cos 90° = \overline{a}^2 + \overline{b}^2 - 2\overline{a}\overline{b} \cdot 0,$$

яки

$$\overline{c}^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2$$

икәнен исбатларга кирәк иде.

Мисал.

Өчпочмакны чишәргә:

Бирелгән:

$a = 5$; $b = 10$; $\angle C = 60°$.

Табарга:

c, $\angle A$, $\angle B$ ын.

Чишү:

Косинуслар теоремасы буенча:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$
$$c^2 = 25 + 100 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cos 60°,$$
$$c^2 = 125 - 100 \cdot 0,5,$$
$$c^2 = 125 - 50,$$
$$c^2 = 75.$$

$c = \sqrt{75} \approx 9$ һәм $c = -\sqrt{75}$ — бу кыйммәте шартны канәгатьләндерми.

A почмагын табу өчен, косинуслар теоремасын a ягына карата файдаланабыз.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

Бирелгән кыйммәтләрне куйгач:

$$25 = 100 + 75 - 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cos A.$$

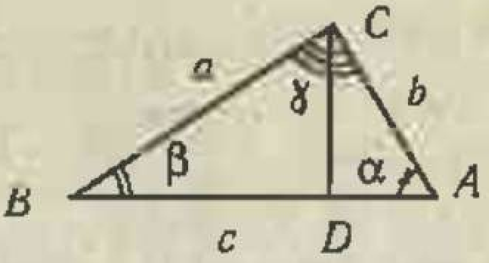
$\cos A = 0,83$. Таблицадан $\angle A = 34°$ икәнен табабыз.

$$\angle B = 180° - 60° - 34° = 86°.$$

Җавап: $\sqrt{75}$, 34°, 86°.

Синуслар теоремасы

Т е о р е м а 23.2. ***Өчпочмакның яклары каршы ятучы почмакларның синусына пропорциональ.***



Б и р е л г ә н: $\triangle ABC$.

И с б а т л а р г а:

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

И с б а т л а у:

C түбәсеннән CD перпендикулярын төшерик. CBD һәм ACD турыпочмаклы өчпочмаклары хасил булды.

BCD өчпочмагыннан: $\sin\beta=\frac{CD}{BC}=\frac{CD}{a}$,

ACD өчпочмагыннан: $\sin\alpha=\frac{CD}{AC}=\frac{CD}{b}$.

Бу тигезлекләрнең һәркайсыннан CD ны табыйк:

$$CD=a\cdot\sin\beta,$$
$$CD=b\cdot\sin\alpha,$$

аларның уң якларын тигезләсәк, $a\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha$ килеп чыга.

Пропорциянең төп үзлеге: кырый буыннар тапкырчыгышы урта буыннар тапкырчыгышына тигезлегеннән файдаланып,

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}$$

икәнен табабыз.

Теореманың икенче өлешен исбатлау өчен перпендикулярны A түбәсеннән BC ягына үткәреп, шулай ук фикер йөртергә кирәк.

М и с а л.

Өчпочмакны чишәргә.

Б и р е л г ә н:
$a=10$, $\alpha=30°$, $b=15$.

Т а б а р г а:
c, β, γ ны

Ч и ш ү:

a һәм b якларына карата синуслар теоремасын языйк:

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b},$$

моннан $\sin\beta=\frac{\sin 30°\cdot 15}{10}=\frac{0{,}5\cdot 15}{10}=0{,}75$.

Таблица ярдәмендә: $\beta=49°$ ны табабыз. γ почмагын табыйк:

$$\gamma=180°-30°-49°=101°.$$

c ягын табар өчен синуслар теоремасын c һәм a якларына карата файдаланыйк.

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\gamma}{c};\quad \frac{\sin 30°}{10}=\frac{\sin 101°}{c}.$$

101° лы почмакның синусын ике төрле юл белән таблицадан табарга мөмкин.

$$\sin 101^\circ = \sin(90^\circ + 11^\circ) = \cos 11^\circ \approx 0,98,$$

яки

$$\sin 101^\circ = \sin(180^\circ - 79^\circ) = \sin 79^\circ \approx 0,98.$$

c ягын табыйк: $c = \frac{0,98 \cdot 10}{0,5} \approx 20.$

Җ а в а п: 20, 49°, 101°.

Мәсьәләләр чишкәндә кайсы теореманы кулланырга кирәклеген мәсьәләнең шартына карап билгеләргә мөмкин. Әгәр мәсьәләнең шартында өчпочмакның ике ягы һәм алар арасындагы почмагы, яисә өч ягы билгеле булса, косинуслар теоремасыннан файдаланырга кирәк. Әгәр өчпочмакның ике почмагы һәм бер ягы, яисә ике ягы һәм алар арасында булмаган почмагы бирелгән булса, синуслар теоремасыннан файдалану зарур.

М и с а л. Өчпочмакны чишәргә.

Б и р е л г ә н: $a = 7$, $b = 10$, $\alpha = 120^\circ$.

Т а б а р г а: c, β, γ ны.

Ч и ш ү:

Бу мәсьәләне чишү өчен синуслар теоремасын кулланабыз, чөнки шартта ике ягы һәм алар арасында ятмаган почмак бар.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}.$$

Бирелгәннәрне тигезләмәгә куеп, табабыз:

$$\frac{\sin 120^\circ}{7} = \frac{\sin\beta}{10}.$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = 0,8.$$

$$\frac{0,8}{7} = \frac{\sin\beta}{10},$$

$$\sin\beta = \frac{0,8 \cdot 10}{7} \approx 1,1.$$

Синусның кыйммәте бердән зур була алмый, шуңа күрә мондый өчпочмак та юк.

М и с а л. Өчпочмакны чишәргә.

Б и р е л г ә н: $a = 10$, $b = 20$, $c = 25$.

Т а б а р г а: α, β, γ ны.

Ч и ш ү:

Безгә өч як бирелгән, димәк, косинуслар теоремасын кулланырга кирәк.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma,$$

$$625 = 100 + 400 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cos\gamma,$$

$$625 - 100 - 400 = -400 \cos\gamma,$$

$$125 = -400\cos\gamma,$$
$$\cos\gamma = 125 : (-400),$$
$$\cos\gamma \approx -0{,}3.$$

Косинус тискәре булса, почмак җәенке була. Таблицадан косинусы + 0,3 кә тигез булган почмакны табабыз. Ул 72°. Димәк, $\gamma = 180° - 72° = 108°$.

Икенче почмакны табу өчен косинуслар теоремасын, яисә синуслар теоремасын кулланырга була. Синуслар теоремасы гадирәк.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}, \quad \frac{\sin\alpha}{10} = \frac{\sin 108°}{25}.$$

Синус 108° ны табыйк:

$$\sin 108° = \sin(180° - 72°) = \sin 72° = 0{,}9.$$

$$\frac{\sin\alpha}{10} = \frac{0{,}9}{25}, \text{ моннан } \sin\alpha = \frac{0{,}9 \cdot 10}{25} \approx 0{,}4$$

Таблицадан почмакны табыйк. $\alpha = 22°$.

$$\beta = 180° - 108° - 22° = 50°.$$

Җавап: 108°, 22°, 50°.

23 НЧЕ ЗАЧЕТ

1) Өчпочмакны чишү нәрсә ул?
2) 23.1 теоремасы һәм аның нәтиҗәсе ничек әйтелә?
3) 23.2 теоремасы ничек әйтелә?

“4” ле “5” ле билгеләре алу өчен, 23.1 һәм 23.2 теоремаларын һәм 23.1 теоремасының нәтиҗәсен исбат итәргә кирәк.

23 нче контроль эш

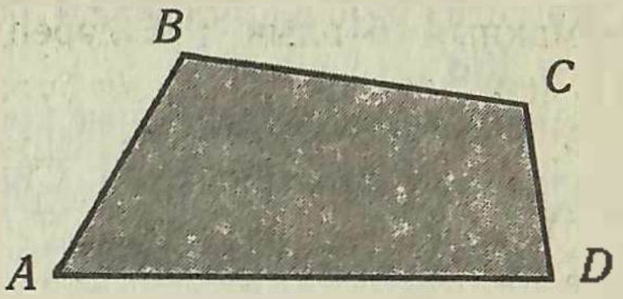
1) Әгәр $a = 8$, $\alpha = 20°$, $\beta = 50°$ булса, өчпочмакны чиш.
2) Әгәр, $a = 20$, $b = 40$, $c = 50$ булса, өчпочмакны чиш.

§ 24. КҮППОЧМАКЛАР

8 нче сыйныфта күппочмак һәм аның элементларына билгеләмәләр биргән идек, шуларны искә төшереп үтик.

Яссылыкның йомык сынык сызык белән чикләнгән өлеше күппочмак дип атала.

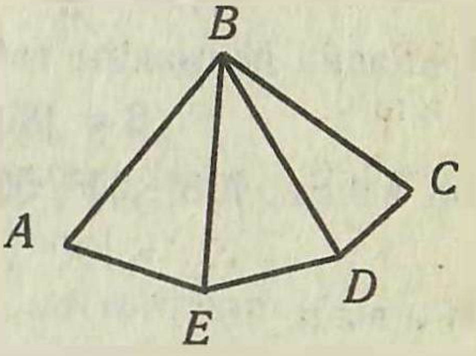
Бу *ABCD* күппочмагы



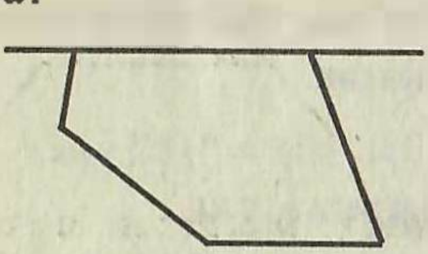
Сынык сызыкның түбәләре күппочмакның *түбәләре* дип, сынык сызыкны тезүче кисемтәләр күппочмакның *яклары* дип атала.

Күппочмакның янәшә булмаган ике түбәсен тоташтыручы кисемтә аның диагонале дип атала.

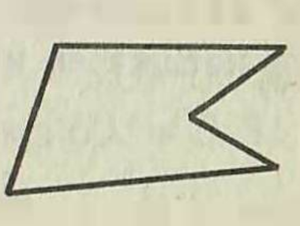
BE һәм *BD* күппочмакның диагональләре



Билгеләмә: ***Күппочмак теләсә кайсы якның дәвамы булган турыдан бер якта гына урнашса, ул кабарынкы күппочмак дип атала.***



Кабарынкы

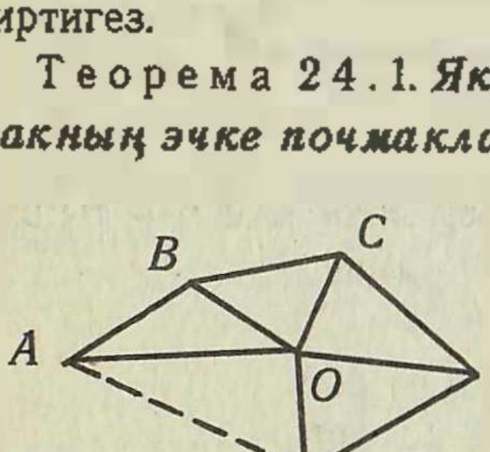


Кабарынкы түгел

Мәктәп программасына бары тик кабарынкы күппочмакларны өйрәнү генә кертелгән.

Теләсә нинди күппочмакның яклары саны белән почмаклары саны биртигез.

Теорема 24.1. ***Яклар саны n булган кабарынкы күппочмакның эчке почмаклары суммасы*** $S_n = 180° (n - 2)$ ***гә тигез.***



Бирелгән:
ABC ... - күппочмак,
n— аның яклары саны.
Исбатларга:
$S_n = 180° \cdot (n - 2)$.

И с б а т л а у:

Күппочмакның эчендә теләсә нинди O ноктасын алыйк, аны күппочмакның һәрбер түбәсе белән тоташтырыйк. n өчпочмак килеп чыгар. Бер өчпочмакның эчке почмаклары суммасы 180° булганлыктан, n өчпочмакның эчке почмаклары суммасы $180°n$ була. Бу суммага күппочмакның барлык түбәләрендәге почмаклары суммасы белән бергә O ноктасы янында хасил булган барлык почмакларның суммасы да керә. Ләкин алары безгә кирәк түгел. Аларның суммасы 360°. Шуңа күрә, $S_n = 180° \cdot n - 360° = 180° \cdot (n - 2)$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

М и с а л.

22-почмакның эчке почмакларының суммасын табарга,

Б и р е л г ә н:

$n = 22$.

Т а б а р г а: S_{22} не.

Ч и ш у:

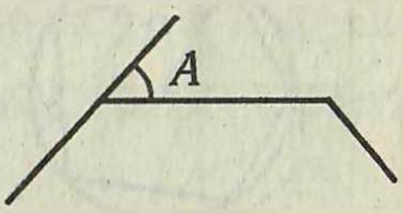
$S_n = 180° \cdot (n - 2)$ формуласына n урынына 22 не куйыйк:

$$S_{22} = 180° (22 - 2) = 180° \cdot 20 = 3600°.$$

Җ а в а п: 3600°.

Б и л г е л ә м ә. *Күппочмакның эчке почмагы белән чиктәш почмак аның тышкы почмагы дип атала.*

A — тышкы почмак.



Т е о р е м а 24.2. ***Күппочмакның тышкы почмаклары суммасы 360° ка тигез була.***

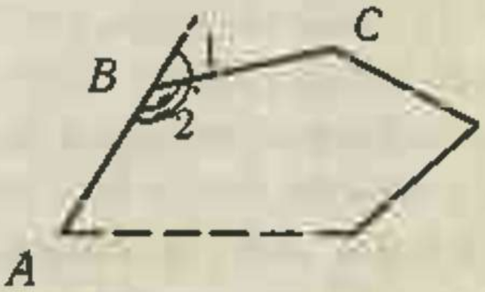
Б и р е л г ә н:

ABC ... — күппочмак,

$\angle 1$ — тышкы почмак.

И с б а т л а р г а:

$S_{т.п.} = 360°$.



И с б а т л а у:

Бирелгән күппочмакта n почмак бар. Бер эчке һәм бер тышкы почмакның суммасы 180°. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, димәк,

$$S_{э.п.} + S_{т.п.} = 180° \cdot n;$$

Моннан

$$S_{т.п.} = 180° \cdot n - S_{э.п.}$$

$S_{\text{эп.}} = 180° \cdot (n - 2)$ булганлыктан,
$S_{\text{тп}} = 180° \cdot n - 180° \cdot (n - 2) =$
$= 180° \cdot n - 180° \cdot n + 360° = 360°.$

Теорема исбат ителде.

Мисал.

Әгәр күппочмакның һәр тышкы почмагы 4° ка тигез булса, ул ничә яклы булыр?

Бирелгән: $\angle A = 4°$.

Табарга: n ны.

Чишү:

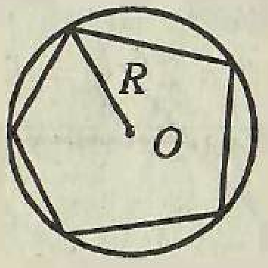
$$S_{\text{т.п.}} = 360° : n = 360° : 4° = 90.$$

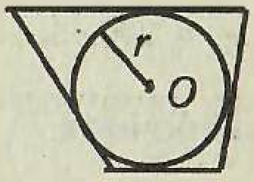
Җавап: 90 яклы.

Билгеләмә. *Күппочмакның барлык яклары һәм барлык почмаклары тигез булса, ул күппочмак төзек дип атала.*

Тигезъяклы өчпочмак — төзек күппочмак. Аның барлык яклары үзара тигез, барлык почмаклары да 60° лы. Квадрат шулай ук төзек күппочмак. Аның да барлык яклары үзара тигез, барлык почмаклары да 90° лы. Ромб — төзек күппочмак түгел. Аның яклары тигез, ә почмаклары үзара тигез түгел.

Билгеләмә. *Күппочмакның барлык түбәләре дә әйләнәдә ятса, ул әйләнәгә камаулы күппочмак дип атала.*



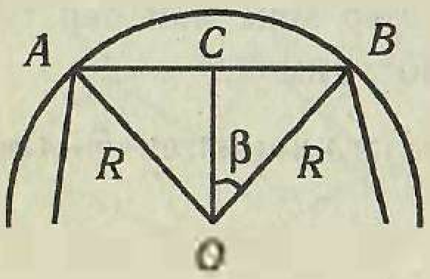


Билгеләмә. *Күппочмакның барлык яклары да әйләнәгә орынма булып хезмәт итсә, ул камаучы күппочмак дип атала.*

Әгәр күппочмак камаулы булса, әйләнә камаучы була, аның радиусы R хәрефе белән билгеләнә.

Әгәр күппочмак камаучы булса, әйләнә камаулы була, һәм аның радиусы r хәрефе белән билгеләнә.

Теорема 24.3. ***Камаулы төзек n почмакның ягы $a_n = 2R \cdot \sin\frac{180°}{n}$ га тигез.***



Бирелгән:
AB ... камаулы төзек күппочмак.
n — яклар саны

Исбатларга:
$a_n = 2R \cdot \sin\frac{180°}{n}$.

Исбатлау:

OBC өчпочмагында: $OB = R$; $\sin\beta = \frac{CB}{OB} = \frac{CB}{R}$.

Моннан $CB = R \cdot \sin\beta$; $AB = 2\,OB$ булганлыктан,

$$AB = a_n = 2R \cdot \sin\beta.$$

β почмагы нәрсәгә тигез соң?

Бирелгән күппочмакта AOB почмагы $\frac{360°}{n}$.

β — аның яртысын тәшкил итә, шуңа күрә, $\beta = \frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n}$.

Шулай итеп, $a_n = 2R \cdot \sin\frac{180°}{n}$.

Теорема исбат ителде.

Нәтиҗәләр. 1) *Камаулы төзек өчпочмакның ягы:* $a_3 = \sqrt{3}R$.

Исбатлау:

$$a_3 = 2R \cdot \sin\frac{180°}{3} = 2R \cdot \sin 60° = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} = \sqrt{3}R.$$

2) *Камаулы төзек дүртпочмакның ягы:* $a_4 = \sqrt{2}R$.

Исбатлау:

$$a_4 = 2R \cdot \sin\frac{180°}{4} = 2R \cdot \sin 45° = \frac{2R\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2} = \sqrt{2}R.$$

3) *Камаулы төзек алтыпочмакның ягы:* $a_6 = R$.

Исбатлау:

$$a_6 = 2R \cdot \sin\frac{180°}{6} = 2R \cdot \sin 30° = 2R\frac{1}{2} = R.$$

1) Мәсәлән, камаулы төзек 9 - почмакның ягын табарга кирәк.

Бирелгән:

$R = 20$ см,

$n = 9$.

Табарга:

a_9 ны.

Чишү:

$$a_n = 2R \cdot \sin\frac{180°}{n}.$$

$$a_9 = 2R \cdot \sin\frac{180°}{9},$$

$$a_9 = 2R \cdot \sin 20°,$$

$$a_9 = 2 \cdot 20 \cdot 0,3,$$

$$a_9 = 12.$$

Җавап: 12 см.

2) Ягы 8 см булган төзек өчпочмак әйләнәгә камалган. Әйләнәнең радиусын табарга.

Бирелгән:

$n = 3$,

$a_3 = 8$ см.

Табарга:

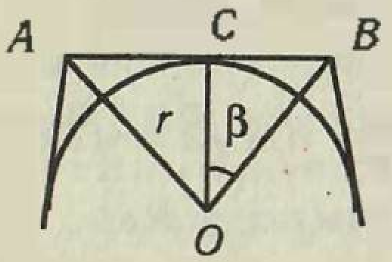
R ны.

Чишү:

$$a_3 = R\sqrt{3},$$
$$8 = R\sqrt{3},$$
$$R = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$
$$R = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

Җавап: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см.

Теорема 24.4. ***Камаучы төзек күппочмакның ягы*** $a_n = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$. ***була.***



Бирелгән:

AB ... — төзек күппочмак,

n — яклар саны.

Исбатларга:

$a_n = 2r \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

Исбатлау:

COB өчпочмагында $CO = r$, моннан $OB = r \cdot \operatorname{tg}\beta$. CB кисемтәсе AB ның яртысына тигез булганлыктан, $AB = 2CB$.

$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$. β — AOB почмагының яртысы, шуңа күрә ул $\frac{180^\circ}{n}$ га тигез була.

Шулай итеп, $a_n = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

Шуны исбатларга кирәк иде дә.

1 нче нәтиҗә. $a_3 = 2\sqrt{3}$.

Исбатлау:

$$a_3 = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{3}. = 2r \cdot \operatorname{tg}60^\circ = 2r \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}r.$$

2 нче нәтиҗә. $a_4 = 2r$.

Исбатлау:

$$a_4 = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{4}. = 2r \cdot \operatorname{tg}45^\circ = 2r \cdot 1 = 2r.$$

3 нче нәтиҗә. $a_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Исбатлау:

$$a_6 = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{6} = 2r \cdot \operatorname{tg}30^\circ = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

4 нче нәтиҗә. *Төзек өчпочмакны камаучы әйләнәнең радиусы камаулы әйләнәнең радиусыннан 2 тапкырга зуррак.*

Исбатлау:

24.3 теоремасының 1 нче нәтиҗәсеннән $a_3 = R\sqrt{3}$; $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$ икәнен беләбез.

24.4 теоремасының 1 нче нәтиҗәсеннән $a_3 = 2r\sqrt{3}$; $r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}$ икәнен беләбез.

$R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$ белән $r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}$ чагыштырып карасак, r ның 2 тапкырга кечерәк икәне күренә. Димәк, $R = 2r$.

Мисал.

1) Камаулы әйләнәнең радиусы 20 см булса, камаучы 10 почмакның ягын табарга.

Бирелгән:	Табарга:
$r = 20$ см.	a_{10} ны.
$n = 10$.	

Чишү:

$$a_n = 2r \cdot \mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n},$$

$$a_{10} = 2r \cdot \mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{10},$$

$$a_{10} = 2r \cdot \mathrm{tg}\,18^\circ,$$

$$a_{10} = 2 \cdot 20 \cdot 0,3,$$

$$a_{10} = 12.$$

Җавап: 12 см.

2) Ягы 12 см булган төзек алтыпочмакка камаулы әйләнәнең радиусын табарга.

Бирелгән:	Табарга:
$n = 6$,	r ны.
$a = 12$ см.	

Чишү.

3 нче нәтиҗә буенча

$$a_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3},$$

$$12 = \frac{2r\sqrt{3}}{3},$$

$$36 = 2r\sqrt{3},$$

$$r = \frac{36}{2\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\cdot\sqrt{3}}{3},$$

$$r = 6\sqrt{3}\ \text{см}.$$

Җавап: $r = 6\sqrt{3}$.

Бик борынгы заманнарда ук, әйләнәнең озынлыгы үзенең радиусына караганда 3 тапкырга зуррак икәнен искәргәннәр. Әйләнә озынлыгының диаметр озынлыгына чагыштырмасын π (пи) хәрефе белән билгеләгәннәр: $\frac{C}{D} = \pi$, моннан $C = \pi D$; $D = 2R$ булганлыктан, $C = 2\pi R$. Шулай итеп, әйләнә озынлыгын исәпләү өчен ике формула килеп чыккан.

$$C = \pi D; \; C = 2\pi R.$$

π санының кыйммәте якынча 3,1416 ... . Мәсьәләләр чишкәндә уңайлык өчен түгәрәкләп, $\pi = 3$ дип алырга мөмкин.

Мисал.

Радиусы 90 см булган әйләнәнең озынлыгын табарга.

Бирелгән: $R = 90$ см.

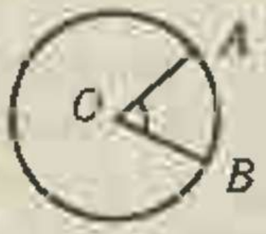
Табарга: C ны.

Чишү:

$$C = 2\pi r,$$
$$C = 2 \cdot 3 \cdot 90,$$
$$C = 540.$$

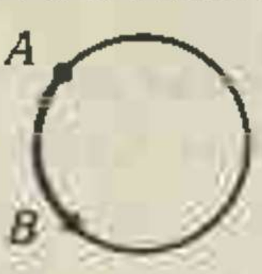
Җавап: 540 см.

Билгеләмә. *Түгәрәкнең ике радиусы ярдәмендә төзелгән почмак үзәк почмак дип атала.*



$\angle AOB$ — үзәк почмак.

Билгеләмә. *Әйләнәнең ниндидер бер өлеше дуга дип атала.*



AB дугасы

Дуга озынлыгын исәпләү формуласын чыгару

$n°$ лы почмакка туры килүче дуганың озынлыгын табыйк. Әйләнәгә 360° лы үзәк почмак туры килә. Әйләнә озынлыгы $C = 2\pi R$. 1° лы үзәк почмакка туры килүче дуганың озынлыгын исәпләү өчен, әйләнә озынлыгын 360° ка бүләбез. Үзәк почмак n° лы булганда, аңа туры килгән дуганың озынлыгын табу өчен, n га тапкырлыйбыз. Шулай итеп: $l = \frac{2\pi R \cdot n°}{360°} = \frac{\pi R \cdot n}{180}$.

Дуга озынлыгын исәпләү формуласы:

$$l = \frac{\pi R \cdot n}{180}.$$

Мисал.

45° лы дуга озынлыгын табарга. Әйләнәнең радиусы 10 см.

Бирелгән: $R = 20$ см, $n = 45°$.

Табарга: l ны.

Чишү:

$$l = \frac{\pi R \cdot n}{180}.$$

$$l = \frac{3 \cdot 10\ 45°}{180°},$$

$$l = \frac{3 \cdot 10}{4} = 7.5$$

Җавап: 7,5 см.

24 НЧЕ ЗАЧЕТ

1. Сынык сызык нәрсә ул?
2. Нинди сынык сызык йомык сынык сызык дип атала?
3. Күппочмак нәрсә ул?
4. Нинди күппочмак кабарынкы күппочмак дип атала?
5. 24.1 һәм 24.2 теоремаларын исбатларга.
6. Күппочмакның тышкы почмагы дип нинди почмакны атыйбыз?
7. Нинди күппочмак төзек күппочмак дип атала?
8. Нинди күппочмак камаулы күппочмак дип атала?
9. Нинди күппочмак камаучы күппочмак дип атала?
10. π саны нинди сан һәм аның кыйммәте нәрсәгә тигез?
11. Нинди почмак ул үзәк почмак?
12. Дуга нәрсә ул?
13. Әйләнә озынлыгын исәпләү формулаларын языгыз.
14. Дуга озынлыгын исәпләү формуласын чыгарыгыз.
15. 24.3 һәм 24.4 теоремалары һәм аларның нәтиҗәләре ничек әйтелә?

"4" ле билгесе алу өчен 24.3 теоремасын һәм аның нәтиҗәсен исбатларга.

"5" ле билгесе алу өчен 24.4 теоремасын һәм аның нәтиҗәсен исбатларга.

24 нче контроль эш

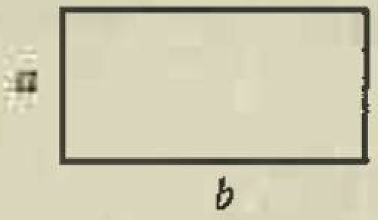
1) Эчке почмагы 170° ка тигез булган төзек күппочмакның почмаклары санын табарга.

2) Өчпочмакның яклары 50 см. Камаулы һәм камаучы әйләнәләрнең радиусларын табарга.

3) Радиусы 20 см булган әйләнәдә 100° лы дуга озынлыгын табарга.

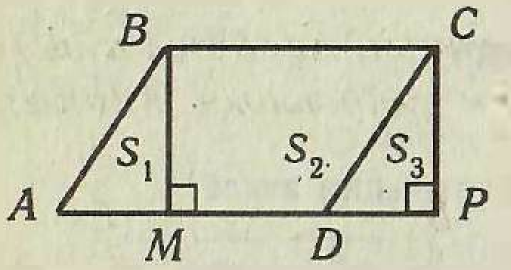
§ 25. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ҺӘМ ӨЧПОЧМАКНЫҢ МӘЙДАНЫ

Турыпочмаклыкның мәйданы иңе белән буеның тапкырчыгышына тигез.



$S = a \cdot b$

Теорема 25.1. ***Параллелограммның мәйданы аның бер ягы белән шул якка үткәрелгән биеклекнең тапкырчыгышына тигез.***



Бирелгән:
$ABCD$ — параллелограмм,
BM — аның биеклеге.
Исбатларга:
$S_{ABCD} = AD \cdot BM$.

Исбатлау:

AD ягын D түбәсе ягына дәвам итеп, CP биеклеген төзик. ABM өчпочмагының мәйданын S_1 аша, $BCDM$ трапециясенең мәйданын S_2 аша, CPD өчпочмагының мәйданын S_3 аша билгелик. ABM һәм CPD өчпочмакларын карыйк. Аларда $AB = CD$, чөнки алар параллелограммның капма-каршы яклары, $BM = CP$ — параллель турылар арасындагы ераклык. Өчпочмаклар турыпочмаклы булганлыктан, алар гипотенуза һәм бер катетлары буенча тигез булалар. Тигез өчпочмакларның мәйданнары да тигез була. $S_1 = S_3$.

Параллелограммның мәйданы $BMDC$ трапециясе белән ABM өчпочмагының мәйданы суммасына тигез. $S_{ABCD} = S_1 + S_2$. $BCPM$ турыпочмаклыгының мәйданы шул ук $BMDC$ трапециясе белән DCP өчпочмагының мәйданнары суммасына тигез.

$S_{BCPM} = S_2 + S_3$. ABM һәм DCP өчпочмакларының мәйданнары тигез булганлыктан, $ABCD$ параллелограммы белән $BCPM$ турыпочмаклыгының мәйданнары тигез.

Турыпочмаклыкның мәйданы иңе белән буеның тапкырчыгышына тигез: $S_{BCPM} = MP \cdot BM$. Параллелограммның мәйданы шул ук тапкырчыгышка тигез $S_{ABCD} = MP \cdot BM$.

MP ике кисемтәдән тора: $MP = MD + DP$.

AD ике кисемтәдән тора: $AD = AM + MD$.

$\triangle ABM = \triangle DCP$ булганлыктан, $AM = DP$, шулай булгач, $MP = AD$.

$S_{ABCD} = MP \cdot BM$ тигезлегендә MP ны AD белән алмаштырсак, $S_{ABCD} = AD \cdot BM$ килеп чыга.

Теорема исбат ителде.

$$S_{парал.} = a \cdot h_a.$$

Мисал.

Бер ягы 20 см, аңа үткәрелгән биеклеге 8 см булган параллелограммның мәйданын табарга.

Бирелгән: $a = 20$ см, $h_a = 8$ см.

Табарга: S ны.

Чишү:

$S_{парал.} = a \cdot h_a$.

$S = 20 \cdot 8 = 160$.

Җавап: 160 $см^2$.

Теорема 25.2. ***Параллелограммның мәйданы аның ике ягы белән алар арасындагы почмак синусының тапкырчыгышына тигез.***

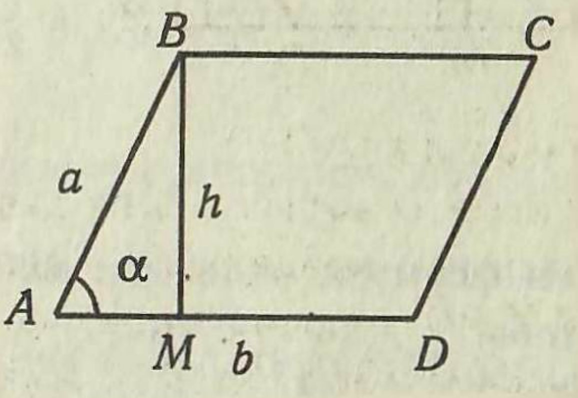
Бирелгән:

$ABCD$ — параллелограмм,

$AB = a$,

$AD = b$,

$\angle A = \alpha$.



Исбатларга:

$S_{парал.} = ab \sin \alpha$.

Исбатлау:

25.1 теоремасы буенча, $S_{парал.} = b \cdot h_b$. ABM өчпочмагында $\sin \alpha = \frac{h}{a}$, моннан $h = a \cdot \sin \alpha$. $S_{парал} = b \cdot h_b = b \cdot a \cdot \sin \alpha = a\,b \sin \alpha$.

Теорема исбат ителде.

Мисал.

Яклары 10 һәм 16 см һәм алар арасындагы почмак 30° булган параллелограммның мәйданын табарга.

Бирелгән:

$a = 10$ см,

$b = 16$ см,

$\alpha = 30°$.

Табарга: S ны.

Чишү:

$S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$,

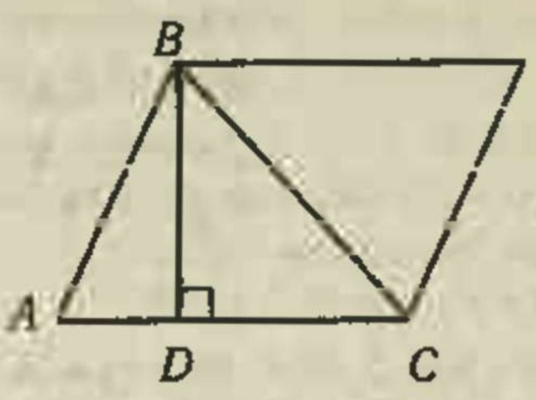
$S = 10 \cdot 16 \cdot \sin 30°$,

$S = 160 \cdot 0{,}5$.

$S = 80$.

Җавап: 80 $см^2$.

Теорема 25.3. ***Өчпочмакның мәйданы нигезе белән шул нигезгә үткәрелгән биеклекнең ярымтапкырчыгышына тигез.***



Бирелгән:

ΔABC,

BD биеклек.

Исбатларга:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

Исбатлау:

Өчпочмакны параллелограммга тутырыйк. BC диагонале параллелограммны ике тигез өчпочмакка бүлә, шулай булгач, өчпочмакның мәйданы параллелограмм мәйданының яртысына тигез була. Параллелограммның мәйданы AC ягы белән аңа үткәрелгән биеклек BD ның тапкырчыгышына тигез. Димәк, ABC өчпочмагының мәйданы ул тапкырчыгышның яртысына тигез.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD,$$

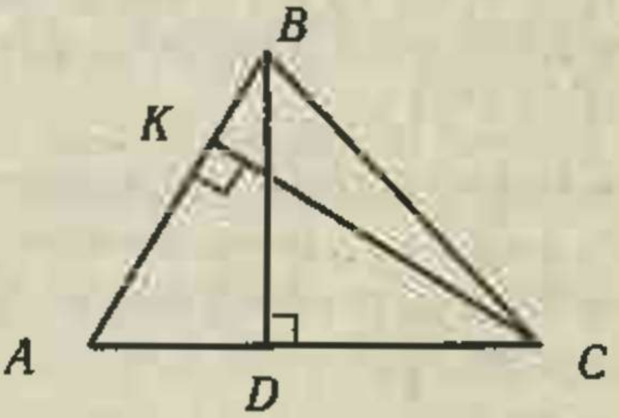
яки

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h_a.$$

Соңгы формула өчпочмак мәйданын исәпләү өчен төп формула булып тора.

Мисал.

Өчпочмакның ике ягы 18 см һәм 10 см. 10 см озынлыгындагы якка үткәрелгән биеклек 6 см га тигез. 18 см лы якка үткәрелгән биеклекне табарга.



Бирелгән:

ΔABC,

BD һәм CK — биеклекләр,

$AC = 10$ см,

$AB = 18$ см,

$BD = 6$ см.

Табарга:

CK ны.

Чишү:

ABC өчпочмагының мәйданын табыйк.

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6.$$

Шул ук ABC өчпочмагының мәйданын икенче як аша да табарга мөмкин: $S = \frac{1}{2} AB \cdot CK$.

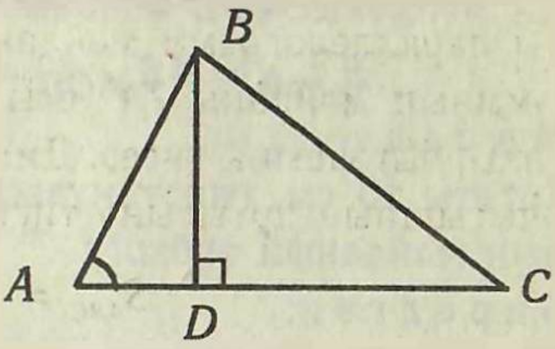
Бу тигезлеккә S урынына 30 ны, AB урынына 18 не куеп, тигезләмә табабыз:

$$30 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot CK,$$
$$30 = 9 \cdot CK,$$
$$CK = 30 : 9,$$
$$CK = 3\frac{1}{3}.$$

Җавап: $CK = 3\frac{1}{3}$ см.

Теорема 25.4. ***Өчпочмакның мәйданы аның ике ягының һәм алар арасындагы почмак синусының ярымтапкырчыгышына тигез.***

Бирелгән:
ΔABC,
BD биеклек.
Исбатларга:
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.



Исбатлау:
Өчпочмакның мәйданын исәпләү формуласыннан файдаланыйк:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

ABD өчпочмагыннан $\sin \alpha = \frac{BD}{AB}$ ны табып, төп формулага куябыз.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A$$

икәнлеге килеп чыга. Теорема исбат ителде.

Нәтиҗәләр. 1. *Турыпочмаклы өчпочмакның мәйданы аның катетларының ярымтапкырчыгышына тигез.*

Исбатлау:

$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$ формуласыннан файдаланыйк. a һәм b катетлар, α — алар арасындагы почмак, ул 90° ка тигез, аның синусы 1 гә тигез була, шуңа күрә турыпочмаклы өпочмакның мәйданы түбәндәгечә: $S = \frac{1}{2} a \cdot b$.

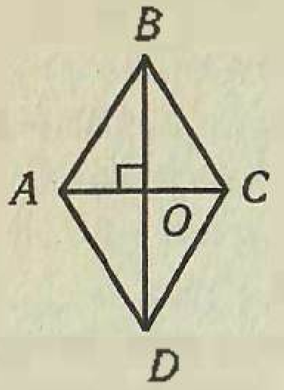
2. *Тигез өчпочмакның мәйданы* $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ *формуласы белән исәпләнә.*

Исбатлау:

Тигез өчпочмакның яклары тигез, почмаклары 60° лы, шуңа күрә

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

3. *Ромбның мәйданы аның диагональләренең ярымтапкырчыгышына тигез.*



И с б а т л а у:

ABO өчпочмагы турыпочмаклы. Ромбның диагональләрен *m* һәм *n* га тигез дип алсак, $AO = \frac{m}{2}$; $BO = \frac{n}{2}$.

Ромбның үзлегеннән һәм ΔABO турыпочмаклы булуыннан файдаланып, язабыз:

$$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{m \cdot n}{8}.$$

Ромб үзара тигез булган дүрт өчпочмактан тора. Аларның һәркайсының мәйданы *AOB* өчпочмагының мәйданына тигез, шуңа күрә

$$S_{\text{ромб}} = 4S_{\Delta AOB} = 4 \cdot \frac{m \cdot n}{8} = \frac{m \cdot n}{2} = \frac{1}{2} m \cdot n.$$

М и с а л.

Катеты 10 см, гипотенузасы 15 см булган турыпочмаклы өчпочмакның мәйданын табарга.

Б и р е л г ә н:	Т а б а р г а:
Турыпочмаклы өчпочмак,	S_Δ ны.
a — катет, $a = 10$ см,	
c — гипотенуза, $c = 15$ см.	

Ч и ш ү: Пифагор теоремасыннан:

$a^2 + b^2 = c^2$.

$225 = 100 + b^2$,

$b^2 = 125$,

$b = \sqrt{125}$ һәм $b = -\sqrt{125}$ — бу тамыр шартны канәгатьләндерми.

Өчпочмакның мәйданын табабыз:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{125} = 25\sqrt{5}.$$

Җ а в а п: $25\sqrt{5}$ см².

Т е о р е м а 25.5. ***Яклары a, в, c булган өчпочмакның мәйданын түбәндәге формула белән исәпләргә мөмкин:***

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

биредә $p = \frac{a+b+c}{2}$ (ярымпериметр). Әлеге формула *Герон* формуласы дип атала.

И с б а т л а у:

$S = \frac{1}{2} a \cdot b \sin\gamma$ формуласыннан файдаланыйк. Косинуслар теоремасы буенча, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, моннан

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Теләсә нинди почмак өчен $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$ икәнен беләбез, шуннан файдаланып,

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)\cdot(1+\cos\gamma) =$$

$$= \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\cdot\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}) =$$

$$= \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$$

$$c-a+b = a+b+c-a-a = 2p-2a,$$

$$c+a-b = a+b+c-b-b = 2p-2b,$$

$$a+b-c = a+b+c-c-c = 2p-2c,$$

$$a+b+c = 2p.$$

Шулай итеп,

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$S = \frac{1}{2}a\cdot b\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Теорема исбат ителде.

Мисал.

Яклары 12 см, 16 см, 20 см булган өчпочмакның мәйданын табарга.

Чишү:

Ярымпериметрны табыйк. $p = \frac{12+16+20}{2} = 24$

$$S = \sqrt{24(24-12)(24-16)(24-20)} = \sqrt{24\cdot 12\cdot 8\cdot 4} =$$

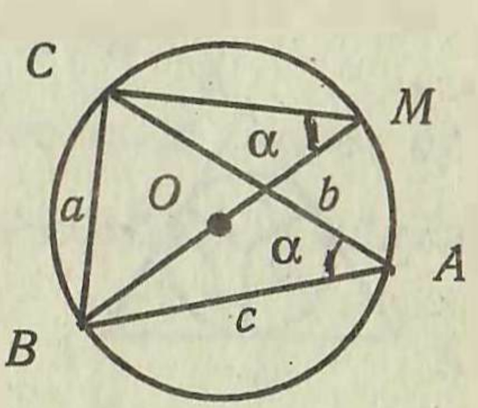
$$= \sqrt{2\cdot 12\cdot 12\cdot 2\cdot 4\cdot 4} = \sqrt{12^2\cdot 4^2\cdot 2^2} = 12\cdot 4\cdot 2 = 96\,(\text{см}^2).$$

Җавап: $S = 96\,\text{см}^2$.

Теорема 25.6. *Өчпочмакның мәйданы якларының тапкырчыгышын аны камаучы әйләнәнең дүртләтелгән радиусына булганга тигез.*

Бирелгән:
$\triangle ABC$,
a, b, c — яклары.
R — камаучы әйләнә радиусы.
Исбатларга:

$S = \frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$.



Исбатлау:

Башта синуслар теоремасында $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R}$ икәнен исбат итик.

Әйләнәнең үзәге аша BM ны үткәрик, ΔBMC турыпочмаклы, чөнки C почмагы ярымәйләнәгә таяна. $\sin M = \frac{BC}{BM} = \frac{a}{2R}$; моннан $a = 2R\sin M$ яки $\frac{\sin M}{a} = \frac{1}{2R}$.

M почмагы белән A почмагы, бер үк BC дугасына таянганлыктан, тигез. Шулай итеп, $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{1}{2R}$, моннан $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, аны тәп формулага куябыз.

$$S = \frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}b\cdot c\frac{a}{2R} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4R}.$$

Теорема исбатланды.

Мисал.

Өчпочмакның яклары 12 см, 16 см, 20 см. Камаучы әйләнәнең радиусын табарга.

Бирелгән:

ΔABC,

a = 12 см, b = 16 см, c = 20 см.

Табарга:

R — камаучы әйләнәнең радиусын.

Чишү:

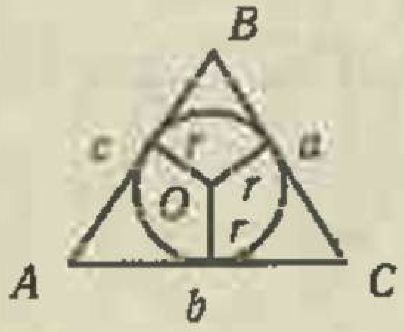
Өчпочмакның мәйданын табыйк. Моннан алда бирелгән мәсьәлә буенча аның мәйданы 96 см^2 була.

$S = \frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$ формуласына бирелгән кыйммәтләрне куйгач, $96 = \frac{12\cdot16\cdot20}{4R}$ тигезләмәсе килеп чыга.

$$96 = \frac{3\cdot16\cdot20}{R},\quad R = \frac{3\cdot16\cdot20}{96} = 10\,(\text{см}).$$

Җавап: R = 10 см.

Теорема 25.7. ***Өчпочмакның мәйданы аның периметры белән камаулы әйләнә радиусының ярымтапкырчыгышына тигез.***



Бирелгән:

ΔABC,

a, b, c — аның яклары,

r — камаулы әйләнә радиусы.

Исбатларга:

$S = \frac{1}{2}Pr$, биредә $P = a + b + c$.

Исбатлау:

ABC өчпочмагының мәйданын AOB, AOC, BOC өчпочмакларының мәйданнары суммасына тигез дип карарга була.

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a + b + c) = \frac{1}{2}Pr,$$

шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мисал.

Яклары 12 см, 16 см, 20 см булган өчпочмакка камаулы әйләнәнең радиусын табарга.

Бирелгән:

$\triangle ABC$,

яклары: 12 см, 16 см, 20 см.

Табарга:

r ны.

Чишү:

Өчпочмакның мәйданы 96 см^2 га тигез икәнлеген тапкан идек (алдагы мәсьәләләрне кара).

$S = \frac{1}{2}Pr$ формуласына бирелгән кыйммәтләрне куябыз.

$96 = \frac{1}{2}(12 + 16 + 20) \cdot r$,

$192 = 48r$,

$r = 192 : 48$,

$r = 4$.

Җавап: $r = 4$ см.

25 НЧЕ ЗАЧЕТ

25.2, 25.3 теоремаларын исбатлагыз. 25.1, 25.4 теоремалары ничек әйтелә?

"4" ле алу өчен өстәмә эш: 25.1, 25.7 теоремаларын исбатларга.

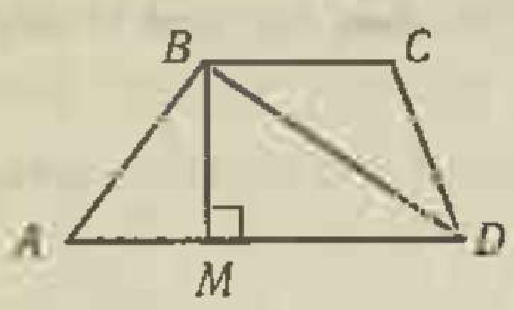
"5" ле алу өчен өстәмә эш: 25. 5 теоремасын исбатларга.

25 нче контроль эш

1. Яклары 10 см, 20 см һәм алар арасындагы почмагы 60° булган параллелограммның мәйданын табарга.
2. Нигезе 18 см, ян ягы 12 см булган тигезьянлы өчпочмакның мәйданын табарга.

§ 26. ФИГУРАЛАРНЫҢ МӘЙДАНЫ

Теорема 26.1. ***Трапециянең мәйданы нигезләренең ярымсуммасы белән биеклегенең тапкырчыгышына тигез.***



Бирелгән:
$ABCD$ — трапеция,
BM — биеклек.
Исбатларга:
$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot BM$.

Исбатлау:

BD диагонален үткәрик. Трапеция ике өчпочмакка бүленә. Аның мәйданы шул өчпочмакның мәйданнары суммасына тигез. Өчпочмакларның мәйданын табыйк һәм аларны кушыйк.

$$+\begin{array}{l} S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BM \\ S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot BM \\ \hline S_{\Delta ABCD} = \frac{1}{2} AD \cdot BM + \frac{1}{2} BC \cdot BM \end{array}$$

$$S_{\Delta ABCD} = \frac{1}{2} BM(AD + BC).$$

Теорема исбатланды.

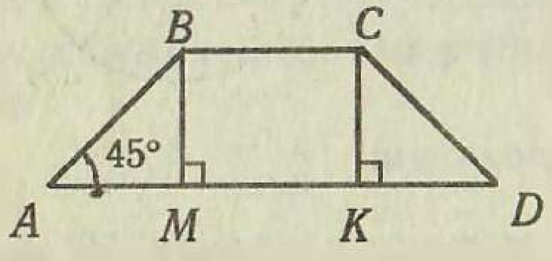
Нәтиҗә. Трапециянең мәйданы аның урта сызыгы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез.

Исбатлау:

Урта сызык ике нигезнең ярымсуммасына тигез, шуңа күрә дә трапециянең мәйданы аның урта сызыгы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез була.

Мисал:

Нигезләре 10 см һәм 18 см, почмагы 45° булган тигезьянлы трапециянең мәйданын табарга.



Бирелгән:
$ABCD$ — тигезьянлы трапеция,
BC = 10 см,
AD = 18 см,
$\angle A$ = 45°.

Табарга:
S_{ABCD} ны.

Чишү:

BM һәм CK биеклекләрен үткәрик. $BCKM$ турыпочмаклыгын карыйк. $BC = MK$ = 10 см.

ABM һәм DCK өчпочмаклары гипотенуза һәм катет буенча тигез: аларның AM һәм KD яклары да тигез була. AM кисемтәсен табыйк: $AM = (AD - BC) : 2 = (18 - 10) : 2 = 4$ (см).

ABM өчпочмагы турыпочмаклы $\angle A = 45°$ булганлыктан, ул тигезьянлы: $BM = AM = 4$ см — бу трапециянең биеклеге. Мәйданын табабыз:

$$S_{ABCD} = \frac{10+18}{2} \cdot 4,$$

$$S_{ABCD} = 56 \text{ см}^2.$$

Җавап: 56 см^2.

Түгәрәк һәм аның кисәкләренең мәйданы

Түгәрәк мәйданы $S_{түг} = \pi R^2$ формуласы белән исәпләнә.

Мисал.

Радиусы 10 см булган түгәрәк мәйданын табарга.

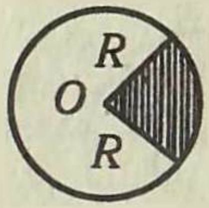
Чишү.

$$S_{түг} = \pi R^2,$$

$$S \approx 3 \cdot 100 \approx 300 \text{ (см}^2\text{)}.$$

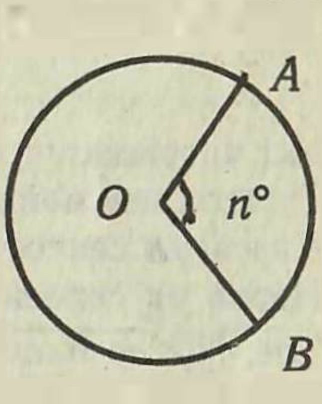
Җавап: ≈ 300 см^2.

Билгеләмә. *Түгәрәкнең ике радиус белән чикләнгән өлеше сектор дип атала.*



Теорема 26.2. ***$n°$ лы секторның мәйданы $S_{сект} = \frac{\pi R^2 \cdot n°}{360°}$ ка тигез.***

Бирелгән:
AOB — сектор,
$\angle AOB = n°$.



Исбатларга:
$S_{сект} = \frac{\pi R^2 \cdot n°}{360°}$.

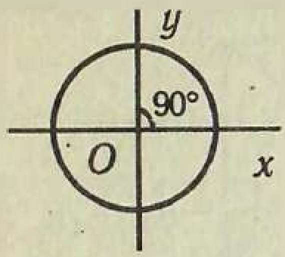
Исбатлау:

Түгәрәк мәйданы $S_{түг} = \pi R^2$.

1° лы түгәрәк секторының мәйданын табу өчен πR^2 ны 360° ка бүләбез, чөнки түгәрәкнең үзәк почмагы 360° лы. Сектор $n°$ лы булганлыктан, аның мәйданы $\frac{\pi R^2}{360°}$ ка караганда n тапкырга зуррак булыр. $S_{сект} = \frac{\pi R^2 \cdot n°}{360°}$. Теорема исбат ителде.

М и с а л.

Радиусы 1 см лы түгәрәкнең үзәге координаталар системасының башлангычында урнашкан. Түгәрәкнең бер координаталар чиреге эчендәге өлешенең мәйданын табарга.



Б и р е л г ә н:

$R = 1$ см.

$n = 90°$.

Т а б а р г а:

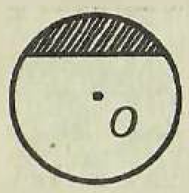
$S_{сект.}$ ын.

Ч и ш ү:

Сектор мәйданын түгәрәк мәйданын 4 кә бүлеп табып булыр иде, ләкин без аны формула белән табыйк:

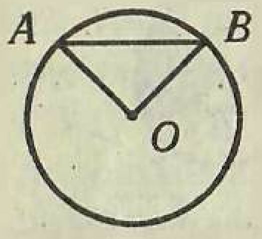
$$S_{сект} = \frac{\pi R^2 \cdot n°}{360°} \approx \frac{3 \cdot 1 \cdot 90°}{360°} \approx 0,75$$

Җ а в а п: $\approx 0,75$ см^2.



Б и л г е л ә м ә. *Түгәрәкнең хорда белән чикләнгән өлеше сегмент дип атала.*

Сегмент мәйданы



Сегмент майданын табу өчен *AOB* секторының мәданыннан *AOB* өчпочмагының мәйданын алырга кирәк.

26 НЧЫ ЗАЧЕТ

1. 26.1 теоремасын һәм аның нәтиҗәсен исбат итегез.
2. Түгәрәкнең мәйданын исәпләү формуласын языгыз.
3. Нәрсә ул сектор?
4. Нәрсә ул сегмент? Аның мәйданын ничек табарга?

"4" ле, "5" ле билгеләре алу өчен 26.2 теоремасын исбатларга.

26нчы контроль эш

1. Нигезләре 20 см һәм 16 см, ян ягы 10 см булган тигезьянлы трапециянең мәйданын табарга.
2. Ягы 12 см булган тигезьяклы өчпочмакны камаучы әйләнәнең мәйданын табарга.
3. Радиусы 20 см лы түгәрәкнең 50° лы секторының мәйданын табарга.

ЭЧТӘЛЕК

Кереш 3

7 нче сыйныф

§ 1. Геометриянең башлангыч төшенчәләре 4
1 нче зачет 6
1 нче контроль эш 6
§ 2. Почмаклар 7
2 нче зачет 9
2 нче контроль эш 9
§ 3. Чиктәш һәм вертикаль почмаклар 12
3 нче зачет 15
3 нче контроль эш 15
§ 4. Перпендикуляр һәм параллель турылар 16
4 нче зачет (телдән контроль эш) 19
§ 5. Әйләнә 20
5 нче зачет 25
5 нче контроль эш 25
§ 6. Өчпочмаклар тигезлегенең беренче һәм икенче билгеләре 26
Өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе 30
Өчпочмаклар тигезлегенең икенче билгесе 30
Өчпочмаклар тигезлеген исбатлауга карата мәсьәләләр чишү кагыйдәләре 32
6 нчы зачет 34
6 нчы контроль эш 35
§ 7. Тигезьянлы өчпочмак 36
7 нче зачет 42
7 нче контроль эш 42
§ 8. Өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесе 43
8 нче зачет 49
8 нче контроль эш 50
§ 9. Турыларның параллельлек билгеләре 51
Турылар параллельлегенең беренче билгесе 52
Турылар параллельлегенең икенче билгесе 52
Турылар параллельлегенең өченче билгесе 53
9 нчы зачет 58
9 нчы контроль эш 58
§ 10. Өчпочмакның почмаклары суммасы 59
10 нчы зачет 63
10 нчы контроль эш 63

§ 11. Турыпочмаклы өчпочмак 64
Турыпочмаклы өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе 64
Турыпочмаклы өчпочмаклар тигезлегенең икенче билгесе 65
Турыпочмаклы өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесе 66
11 нче зачет 69
11 нче контроль эш 69
§ 12. Камаулы почмаклар 70
12 нче зачет 73
12 нче контроль эш 74
§ 13. Нокталарның геометрик урыны 75
13 нче зачет 78
13 нче контроль эш 78

8 нче сыйныф

§ 14. Параллелограмм 79
Күппочмакның элементлары 80
Параллелограмм билгеләре 81
Параллелограммның беренче билгесе 81
Параллелограммның икенче билгесе 82
Параллелограммның өченче билгесе 82
14 нче зачет 85
14 нче контроль эш 85
§ 15. Турыпочмаклык. Ромб. Квадрат 88
Турыпочмаклык билгесе 89
Фалес теоремасы 91
15 нче зачет 97
15 нче контроль эш 97
§ 16. Пифагор теоремасы 98
Пифагор теоремасы 100
16 нчы зачет 104
16 нчы контроль эш 104
§ 17. Турыпочмаклы өчпочмакларны чишү 105
Өчпочмакларны чишү 110
17 нче зачет 111
17 нче контроль эш 114
§ 18. Өчпочмакларны чишү 115
18 нче зачет 116
§ 19. Яссылыкта координаталар 117
Кисемтә уртасының координаталары 118
Нокталар арасындагы ераклык 120
Туры тигезләмәсе 120
Яссылыкта турыларның торышы 122
Әйләнә тигезләмәсе 123
19 нчы зачет 123
19 нчы контроль эш 124
§ 20. Фигураларны үзгәртү 131
20 нче зачет 132
20 нче контроль эш ....

§ 21. Үзгәртүләр 133
Өчпочмакның охшашлык билгеләре 133
Өчпочмаклар охшашлыгының беренче билгесе 133
Өчпочмаклар охшашлыгының икенче билгесе 134
Өчпочмаклар охшашлыгының өченче билгесе 135
21 нче зачет 140
21 нче контроль эш 140

9 нчы сыйныф

§ 22. Векторлар 141
Векторларны кушу 142
Векторны санга тапкырлау 143
Векторларның скаляр тапкырчыгышы 144
22 нче зачет 146
22 нче контроль эш 147
§ 23. Өчпочмакларны чишү 148
Косинуслар теоремасы 149
Синуслар теоремасы 151
23 нче зачет 153
23 нче контроль эш 153
§ 24. Күппочмаклар 154
24 нче зачет 161
24 нче контроль эш 161
§ 25. Параллелограмм һәм өчпочмакның мәйданы 162
25 нче зачет 169
25 нче контроль эш 169
§ 26. Фигураларның мәйданы 170
Түгәрәк һәм аның кисәкләренең мәйданы 171
Сегмент мәйданы 172
26 нчы зачет 172
26 нчы контроль эш 172

Учебное издание

Макаров Юрий Афанасьевич
Хамидуллина Камария Зиннуровна

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
для 7 — 9 классов средней школы
(на татарском языке)

Редакция мөдире *Ф. Г. Иштирәкова*
Редакторы *Л. Х. Мөхәммәтҗанова*
Тышлык рәссамы *Л. С. Золондинова*
Бизәлеш редакторы *Р. А. Сәйфуллина*
Техник редакторы *Л. М. Тилк*
Корректоры *Р. С. Хәмидуллина*

ИБ № 200

Оригинал-макеттан басарга кул куелды 17.02.95. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Офсет кәгазе №2.
«Антиква» гарнитурасы. Офсет басма. Басма табагы 11,0. Шартлы буяу-оттиск 11,25.
Нашер-хисап табагы 8,12. Тиражы 12 700 данә. Заказ Д-155 С-81.

"Мәгариф" нәшрияты. 420503. Казан, Бауман ур., 19.
Издательство "Магариф". 420503. Казань, ул. Баумана, 19.

Компьютерда хәреф җыю һәм китапны биткә салу «Мәгариф» нәшриятында эшләнде.

Татарстан газета-журналлар нәшрияты типографиясе.
420066. Казан, Декабристлар ур., 2.